Lösningsförslag till tentamen i TSRT22 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2020-01-09
Svante Gunnarsson

1. (a)

$$
\begin{aligned}
(i):&\qquad G(s)=\frac{1}{s^2+s+1} &&\text{Poler: } s=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\\
(ii):&\qquad G(s)=\frac{1}{s^2+s+2} &&\text{Poler: } s=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i\\
(iii):&\qquad G(s)=\frac{1}{s^2+2s+1} &&\text{Poler: } s=-1 \text{ (Dubbelpol)}\\
(iv):&\qquad G(s)=\frac{1}{2s^2+s+1} &&\text{Poler: } s=-\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{7}}{4}i
\end{aligned}
$$

Utgående från dessa resultat kan följande slutsatser dras:

- C$\leftrightarrow$ (iii) eftersom systemet har reella poler (och saknar nollställen) vilket ger ett stegsvar utan översläng.
- A $\leftrightarrow$ (ii) eftersom (ii) är det enda systemet som har statisk förstärkning 0.5.
- B$\leftrightarrow$ (iv) och D$\leftrightarrow$ (i) eftersom (iv) är sämre dämpat än (i).

Svar: C - (iii), A - (ii), B - (iv), D - (i)

(b) En sinusformad insignal ger en sinusformad utsignal enligt sambandet att $u(t)=\sin(\omega t)$ ger $y(t)=\mid G(i\omega)\mid\sin(\omega t+\phi)$ där $\phi=\arg G(i\omega)$. Periodtiden hos signalerna kan avläsas i figuren till ca $T=3.1\,$sek, vilket medför att vinkelfrekvensen är $\omega=\frac{2\pi}{3.1}=2.03\approx 2\,$rad/s. Utsignalen y ligger efter insignalen u med ca 0.25 sek, vilket ger $\phi=-2\cdot 0.25=-0.5\,$rad.

Med den givna överföringsfunktionen fås

$$y(t)=\mid\frac{b}{a+2i}\mid\cdot\sin(2t+\phi)$$

Vi antar här att $b\geq 0$. a kan b bestämmas från ekvationerna

$$\mid\frac{b}{a+2i}\mid=\frac{b}{\sqrt{a^2+4}}=0.55$$

samt

$$\arg G(i\omega)=-\arctan(\frac{2}{a})=-0.5$$

vilket ger

$$a=\frac{2}{\tan(\frac{1}{2})}=3.66$$

och

$$b=0.55\cdot\sqrt{a^2+4}=2.29$$

Svar: $a=3.66, b=2.29$.

(c) **Svar:**

- Hög bandbredd motsvarar kort stigtid.
- Hög resonanstopp motsvarar stor översläng.
- Den statiska förstärkningen är lika med stegsvarets slutvärde då insignalen är ett enhetssteg.

2. (a) Reglersystemen i figur A och B uppvisar stationära reglerfel, medan C och D ej har detta. Regulator 1 och 4 inte har någon integralverkan. Stegsvar A har bättre dämpning än stegsvar B, medan stegsvar C har bättre dämpning än stegsvar D. Eftersom derivataverkan ger bättre dämpning, medan integralverkan tar bort stationära reglerfel, men försämrar dämpningen, får vi slutsatserna nedan.

   Svar:(A-4), (B-1), (C-3), (D-2)

   (b) De faktorer som i praktiken begränsar vilka prestanda ett reglersystem kan ges är: Begränsad styrsignal, Mätstörningar och Modellfel.

   (c) Med den givna återkopplingen fås det återkopplade systemets poler som rötterna till den karaktäristiska ekvationen

$$\det\big(Is - (A - BL)\big) = \det\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -2+l_1 & s-1+l_2 \end{pmatrix} = (s+1)(s-1+l_2).$$

   Den stabila polen i -1 kan inte flyttas, och alltså kan inte polerna placeras godtyckligt (ej styrbart). Den andra polen kan placeras godtyckligt med hjälp av l_2 och det återkopplade systemet går alltså att få stabilt. Att det återkopplade systemets poler ej kan placeras godtyckligt kan även visas konstateras genom att visa att determinanten för systemets styrbarhetsmatris är noll.

   Svar: Det återkopplade systemets poler kan inte placeras godtyckligt, men man kan åstadkomma ett stabilt återkopplat system.

3. (a) Systemets poler av A-matrisens egenvärden, vilket ger

$$0 = \det(Is - A) = s^2 - 10 \iff s = \pm\sqrt{10}$$

(b) Med

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}$$

ges den karakteristiska ekvationen av

$$0 = \det(Is - A + \alpha BL) = \det\begin{pmatrix} s & -1 \\ -10+\alpha l_1 & s+\alpha l_2 \end{pmatrix} = s^2 + \alpha l_2 s - 10 + \alpha l_1$$

(c) Med $\alpha = 1$ fås ekvationen

$$0 = s^2 + l_2 s - 10 + l_1$$

som för poler i -1 för det återkopplade systemet önskas vara

$$0 = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

Identifiering av koefficienter ger
Svar:

$$L = \begin{pmatrix} 11 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) Det återkopplade systemet är stabilt om dess poler, givna av den karakteristiska ekvationen

$$0 = s^2 + \alpha l_2 s - 10 + \alpha l_1$$

ligger i vänster halvplan. Polerna ges av

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 11\alpha + 10}$$

För sådana värden på α så att polerna är komplexa är realdelen strikt negativ. För de värden på α då polerna är reella är det återkopplade systemet stabilt, d v s båda rötterna ligger på negativa delen av realaxeln, då $\alpha > \frac{10}{11}$ eftersom rotuttrycket är mindre än α.
Svar: Det återkopplade systemet är stabilt för $\alpha > 10/11$.

4. (a) Följande kan ses med hjälp av figuren:
   - När $\omega \to 0$ gäller att $\arg G(i\omega) \to 0$ vilket innebär att $G(s)$ saknar s-faktorer i nämnaren, d v s $p = 0$.
   - När $\omega \to \infty$ gäller att $\arg G(i\omega) \to -270^\circ$ vilket innebär att $m - n = -3$. En kombination som uppfyller detta är alltså $m = 0$ och $n = 3$.

   Svar: $p = 0, n = 3, m = 0$.

   (b) För att bestämma K_P studerar vi vid vilket ω som $\arg G_O(i\omega) = -150^\circ$ och det inträffar vid $\omega \approx 8$ rad/s. Vid denna vinkelfrekvens gäller att $\mid G(i \cdot 8) \mid \approx 0.3$. Det betyder att K_P som störst kan väljas så att

$$\mid G_O(i \cdot 8) \mid = K_P \mid G(i \cdot 8) \mid = 1$$

   vilket ger

$$K_P = 1/0.3 \approx 3.3$$

   Svar: K_P kan som högst väljas som $K_P = 3.3$ och det ger skärfrekvensen 8 rad/s.

   (c) Med förstärkningen $K_P = 2$ fås skärfrekvensen $\omega_c \approx 5.5$ rad/s, d v s

$$2 \mid G(i5.5) \mid = 1$$

   Figuren ger att

$$\arg G(i5.5) \approx -130^\circ = -2.26 \quad rad$$

   d v s utan tidsfördröjningen har reglersystemet fasmarginalen 50° d v s $\pi - 2.26 = 0.88$ radianer. Tidsfördröjningen försämrar fasmarginalen med $\omega_c T$ radianer, och för att reglersystemet ska vara stabilt krävs

$$\omega_c T < 0.88$$

   d v s

$$T < 0.88/\omega_c = 0.88/5.5 \approx 0.15$$

   Svar: Tidsfördröjningen får ej vara större än 0.15 sekunder.

5. (a) Systemet $G^0(s)$ återkopplas med

$$F(s) = K_P + K_D s = 10 + 1.5s$$

vilket ger det återkopplade systemet

$$G_C^0(s) = \frac{G^0(s)F(s)}{1 + G^0(s)F(s)} = \frac{1.5s + 10}{0.1s^2 + 1.5s + 10 + fs}$$

Den karaktäristiska ekvationen blir

$$0.1s^2 + 1.5s + 10 + f \cdot s = 0$$

d v s

$$s^2 + (15 + 10f)s + 100 = 0$$

och har rötterna

$$s = -\frac{15 + 10f}{2} \pm \sqrt{\frac{(15 + 10f)^2}{4} - 100}$$

För vissa värden på f är rötterna komplexa och då är realdelen strikt negativ. För de f då rötterna är reella ligger båda rötter i vänster halvplan p g a att rotuttrycket är mindre än $(15 + 10f)/2$.

Svar: Det återkopplade systemet är stabilt för alla $f \geq 0$.

(b) Modellfelet fås genom att jämföra med sambandet

$$G^0(s) = G(s)\big(1 + \Delta G(s)\big)$$

vilket ger

$$\Delta G(s) = \frac{G^0(s)}{G(s)} - 1 = -\frac{f}{0.1s + f}$$

Svar:

$$\Delta G(s) = -\frac{f}{0.1s + f}$$

(c) Uppgift b) ger

$$\mid \frac{1}{\Delta G(i\omega)} \mid = \sqrt{1 + (\frac{\omega}{10 \cdot f})^2}$$

vilket för små ω är en vågrät linje på nivån ett och för ω över $10f$ växer mot oändligheten. Om $\mid \frac{1}{\Delta G(i\omega)} \mid$ är nära ett vid resonanstoppen för det återkopplade systemet kommer robushetskriteriet

$$\mid G_C(i\omega) \mid < \mid \frac{1}{\Delta G(i\omega)} \mid$$

ej att uppfyllas. För t ex, $f = 5, \omega = 10$ fås att

$$\mid \frac{1}{\Delta G(i\omega)} \mid = \sqrt{1 + (0.2)^2} \approx 1.02$$

vilket ligger under $G_C(i\omega)$.

Svar: Stabiliteten kan ej garanteras för alla f, vilket kan ses för exempelvis $f = 5$ enligt resonemanget ovan.