Lösningsförslag till tentamen i TSRT22, TSRT19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2019-10-25

Svante Gunnarsson

1. (a) Överföringsfunktionen kan skrivas om enligt

$$G(s) = \frac{\beta}{s+\alpha} = \frac{k}{Ts+1}$$

där $T = 1/\alpha$ och $k = \beta/\alpha$. Figuren ger att $T = 2$ vilket ger $\alpha = 0.5$. Insignalen $u(t) = u_0$ ger att utsignalen går mot $k \cdot u_0$. Figuren ger därmed att $k \cdot u_0 = 5$ vilket ger $b = 2.5/u_0$, d v s

Svar: $\alpha = 0.5$ och $\beta = 2.5/u_0$. För att bestämmas det faktiska värdet på β skulle vi behöva veta u_0.

(b) **Svar:** Exempel på styrsignal $u(t)$: Roderutslag. Exempel på utsignal $y(t)$: Kurs. Exmpel på störning $v(t)$: Vind, strömmar.

(c)
- Stegsvaren B och D har lika stor översläng, och Bodediagrammen I och II har lika stor resonanstopp, vilket gör att dessa hör samman. Stegsvar B har kortast stigtid, vilket hör samman med II som har högst bandbredd.
- Stegsvar C har störst översläng, vilket hör samman med Bodediagram IV som har högst resonanstopp.
- Stegsvar A har ingen översläng, vilket hör samman med Bodediagram III som saknar resonanstopp.

2. (a)
- Kombinationerna (3) och (4) innehåller en I-del, vilka hör samman med diagrammen A och D vilka har statisk förstärkning ett. I (4) är I-delen större, vilket ger ett mera oscillativt återkopplat system, vilket motsvarar Bodediagram D som har högst resonanstopp.
- För kombinationerna (1) och (2), vilka enbart har en P-del, ger ett större värde på K_P att det statiska föstärkningen för $G_C(s)$ blir närmare ett. Det innebär att (2) hör samman med B. Man ser också att det större värdet på K_P ger en resonanstopp i Bodediagrammet.

(b)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \qquad F(s) = K_P + K_I\frac{1}{s} + K_D s = \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s}$$

Det sluta systemet ges av

$$\begin{aligned} G_C(s) &= \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)} \\ &= \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s(s+1)^2 + K_P s + K_I + K_D s^2} = \\ &= \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s^3 + (2+K_D)s^2 + (1+K_P)s + K_I} \end{aligned} \tag{1}$$

Den karakterisktiska ekvationen ges då av

$$s^3 + (2+K_D)s^2 + (1+K_P)s + K_I = 0 \tag{2}$$

De tre koefficienterna $(2+K_D), (1+K_P)$ samt K_I kan väljas oberoende av varandra och således kan polerna placeras godtyckligt.

Svar: Den karakterisktiska ekvationen för det återkopplade systemet ges av $s^3 + (2+K_D)s^2 + (1+K_P)s + K_I = 0$. Polerna för det återkopplade systemet kan placeras godtyckligt.

(c) Känslighetsfunktionen $S(s)$ kan beräknas enligt

$$S(s) = \frac{1}{1+F(s)G(s)} = \frac{1}{1+\frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s(s+1)^2}} = \frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^2 + K_D s^2 + K_P s + K_I}$$

För $K_I \neq 0$ gäller att

$$S(0) = \frac{0}{K_I} = 0 \tag{3}$$

Alltså, om $K_I \neq 0$ är kravet $S(0) = 0$ uppfyllt oberoende av de övriga två regulatorparametrarnas värden.

Det andra kravet i uppgiften, d v s att alla poler ska realdel mindre än eller lika med -1 uppfylls exempelvis om alla poler läggs i -1. Det ger att vi vill att den karakteristiska ekvationen ska vara

$$(s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0$$

vilket fås med $K_P = 2, K_I = 1$ och $K_D = 1$.

Svar: En uppsättning regulatorparametrar som uppfyller kraven är t. ex. $K_P = 2, K_I = 1, K_D = 1$.

3. (a) Med de angivna tillståndsekvationerna fås

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

samt, med hjälp av den givna differentialekvationen,

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -2\zeta\omega_0\dot{y}(t) - \omega_0^2 y(t) + \omega_0^2 u(t) = -2\zeta\omega_0 x_2(t) - \omega_0^2 x_1(t) + \omega_0^2 u(t)$$

På matrisform ger detta tillståndsbeskrivningen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0^2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

(b) Koefficienterna kan bestämmas på några olika sätt. Exempel 3.3 i Glad-Ljung ger att $M = e^{-\alpha}$ där

$$\alpha = \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

I figuren avläser vi en översläng på ungefär 0.37 vilket ger $\zeta = 0.3$. Alternativt kan man använda Figur 2.7 (något svårare att läsa av) på sid 38 i boken och komma fram till samma värde.

Avsnittet på s. 37 i Glad-Ljung visar även att vinkelfrekvensen för svängningen i stegsvaret ges av

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

I figuren kan vi se att utsignalen svänger med en periodtid som är ungefär 3.3 sekunder, vilket motsvarar en vinkelfrekvens $\omega_d \approx 1.9$ och i sin tur $\omega_0 \approx 2.0$. Alternativt kan man använda uttrycken för stig- respektive lösningstid i Exempel 3.3 på sid 65 i boken. Figuren i tentan ger att $T_s \approx 5$, och med resultatet ovan att $\zeta = 0.3$ ger uttrycket $T_s \approx 3/(\zeta\omega_0)$ att $\omega_0 \approx 2$.

(c) Med den givna återkopplingen får vi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0^2 \end{pmatrix} (-Lx + r) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2(1+l_1) & -2\zeta\omega_0 - l_2\omega_0^2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0^2 \end{pmatrix} r \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

Polerna till det slutna systemet ges av egenvärdena till det slutna systemets A-matris. Beräkning av egenvärdena ger den karakteristiska ekvationen

$$s^2 + (2\zeta\omega_0 + l_2\omega_0^2)s + \omega_0^2(1+l_1) = 0$$

(d) Vi vill ha ett slutet system vars poler ligger dubbelt så långt ifrån origo som det öppna systemets och har en relativ dämpning som är 1. Avståndet till origo bestäms av ω_0. Den karakteristiska ekvationen ska alltså vara

$$s^2 + 2(2\omega_0)s + (2\omega_0)^2 = 0$$

Identifiering ger

$$\begin{aligned} l_1 &= 3 \\ l_2 &= \frac{4-2\zeta}{\omega_0} \end{aligned}$$

Svar: Den resulterande återkopplingen blir

$$u(t) = -3x_1(t) - \frac{4-2\zeta}{\omega_0}x_2(t) + r(t)$$

4. (a) I fallen (i), (iii) och (iv) är systemets statiska förstärkning

$$G(0) = b/d$$

och i fall (ii) är den oändlig eftersom $d = 0$ d v s $G(s)$ har ett s i nämnaren.

- I figur B går amplitudkurvan mot oändligheten när ω går mot noll, vilket gör att denna hör samman med (ii).
- I figur A är den statiska förstärkningen två, vilket för att denna hör samman med (iv), eftersom $b = 2$ och $d = 1$ i detta fall.
- I fall (i) d v s

$$G_i(s) = \frac{2s + 1}{s + 1}$$

och i fall (iii), d v s

$$G_{iii}(s) = \frac{2s + 2}{4s + 2} = \frac{s + 1}{2s + 1}$$

är den statiska förstärkningen ett i båda fallen. Genom att t ex sätta in $\omega = 1$ och räkna ut $\mid G_i(i\omega) \mid$ respektive $\mid G_{iii}(i\omega) \mid$ för $\omega = 1$ ser man att (i) hör samman med D och att (iii) hör samman med C.

(b) Blockschemat ger

$$E(s) = \frac{1}{1 + K_P G(s)} R(s)$$

När referenssignalen är ett enhetssteg gäller

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Givet att det återkopplade systemet är stabilt ger slutvärdessatsen att

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \frac{1}{1 + K_P G(0)} = \frac{1}{1 + 2K_P}$$

Detta gäller alltså under förutsättning att det återkopplade systemet är stabilt, så för de K_P detta gäller stämmer konsultens påstående. Det återkopplade systemet blir dock instabilt för stora värden på K_P vilket innebär att påståendet om att uttrycket för felet gäller för alla positiva K_P inte är korrekt.

(c) Utgående de metoder som behandlats i kursens kan konsultens påstående korrigeras på två sätt.

- Rotort: Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation ges av

$$(0.5s + 1)(0.1s + 1)^2 + K_P 2 = 0$$

Reglerna för asymptoterna ger att för stora värden på K_P kommer två poler att gå över till höger halvplan. Värdet på K_P för vilket det sker kan bestämmas med t ex Matlab (eller för hand).

- Bodediagram: Stabiliteten hos det återkopplade systemet kan bedömas genom att studera Bodediagrammet för

$$G_O(i\omega) = K_P G(i\omega)$$

Eftersom täljaren i $G_O(s)$ är en konstant och nämnaren har ordning tre kommer $\arg G_O(i\omega)$ att gå mot $-270°$. Detta innebär att fasmarginalen kommer att bli negativ, d v s det åer-kopplade systemet blir instabilt, om K_P väljs för stort.

5. (a) Med ekvation 6.6 ur Glad&Ljung fås

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s)) = \frac{1}{(1+s)}\left(1 + \frac{-\delta s}{(1+\delta)s+1}\right) = \frac{1}{(1+\delta)s+1} \tag{4}$$

(b) Enligt Robusthetskriteriet kan stabilitet garanteras om

$$\mid T(i\omega) \mid < \frac{1}{\mid \Delta_G(i\omega) \mid} \quad \forall\omega$$

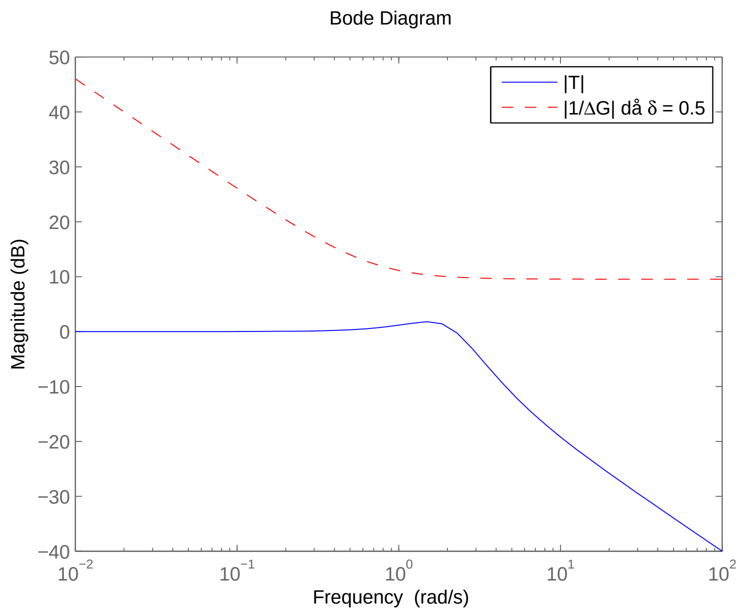
där, i detta fall, $\mid T(i\omega) \mid = \mid G_C(i\omega) \mid$ är given i figuren. För att kunna jämföra med den givna bodeplotten undersöker vi inversen

$$\frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} = \frac{\sqrt{(1+\delta)^2\omega^2+1}}{\omega\delta} \tag{5}$$

vilket är avtagande och har gränsvärdet

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} = \frac{1+\delta}{\delta} \tag{6}$$

som blir som minst 3 för $\delta = 0.5$. Kurvan $\mid G_C(i\omega) \mid$ har ett maximum $|G_c(i1.5)| \approx 1.2 = 6/5$. Alltså skär inte kurvorna varandra för något ω. Detta kan också ses i figur 1.



Figur 1: Fråga 5.b

Isabella och Ivar kan vara fortsatt lugna.

(c) Karakteristiska ekvationen för det återkopplade systemet blir

$$s^2 + 2s + 4 + \delta s^2 = 0 \tag{7}$$

d v s

$$s^2 + \frac{2}{1+\delta}s + \frac{4}{1+\delta} = 0$$

vilken har lösningarna

$$s = -\frac{1}{1+\delta} \pm \sqrt{\frac{1}{(1+\delta)^2} - \frac{4}{1+\delta}}$$

Uttrycket under rottecknet är alltid negativt, d v s polerna är alltid komplexa, med negativ realdel. Det återkopplade systemet är alltså stabilt för alla positiva värden på δ.