Lösningsförslag till tentamen i TSRT03, TSRT19, TSRT22, Reglerteknik

Tentamensdatum: 2019-08-23

Svante Gunnarsson

1. (a) Följande kan noteras från figuerna:

   - Polerna i figurerna I och II har lika stor relativ dämpning, d v s relation mellan imaginärdel och realdel. Detta motsvarar att tillhörande amplitudkurvor har lika hög resonanstopp. Polerna i figur I ligger dock längre från origo, vilket innebär att motsvarande amplitudkurva har högre bandbredd. Detta ger kombinationerna: I - B samt II - A.
   - Polerna i IV har lägst relativ dämpning, d v s störst imaginärdel relativt realdelen. Detta motsvara amplitudkurvan med högst resonanstopp. Detta ger kombinationen IV - C.
   - Systemet i figur III har pol(er) i -2 vilket motsvarar en monotont avtagande amplitudkurva, d v s kombinationen III- D.

   Svar: I - B, II - A, III - D och IV - C

   (b) Principen "sinus-in-sinus-ut" ger att utsignalen i stationärt tillstånd ges av

   $$y(t) = 2 \mid G(i \cdot 1) \mid \sin(t + \arg G(i \cdot 1))$$

   Detta ger

   $$\mid G(i \cdot 1) \mid = \frac{4}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

   samt

   $$\arg G(i \cdot 1) = -\arctan(1/2) = -0.46$$

   Svar:

   $$y(t) = \frac{8}{\sqrt{5}} \sin(t - 0.46)$$

   (c)
   - Eftersom matrisen A i tillståndsmodellen är triangulär kan dess egenvärden läsas av på diagonalen. Man ser då att båda är -1, d v s i vänster halplan, vilket innebär att systemet är stabilt för alla värden på α.
   - Styrbarhetsmatrisen ges av

     $$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

     vilket ger att $\det \mathcal{S} = -\alpha$ och att systemet är styrbart för $\alpha \neq 0$.
   - Observerbarhetsmatrisen ges av

     $$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

     vilket ger att $\det \mathcal{O} = \alpha$ och att systemet är observebart för $\alpha \neq 0$.

   Svar: Systemet är styr- och obsererbart för $\alpha \neq 0$ och stabilt för alla α.

2. (a) Figurerna A och C konvergerar mot samma värde och måste därför vara stegsvaren för kombinationerna iii och iv eftersom dessa har en integrerande del, dvs. $K_I \neq 0$. Figur A har störst översläng och är därför stegsvaret för kombination iv som har störst värde på K_I och figur C är stegsvaret för kombination iii. Figurerna B och D konvergerar mot andra värden och saknar därför integrerande del, dvs. $K_I = 0$, därmed är dessa stegsvaren för kombinationerna i och ii. Eftersom figur D har störst översläng och minst stationärt fel har den störst värde på K_P, därmed tillhör figur D kombination i och figur B kombination ii.
Svar: A - iv, B - ii, C - iii, D - i

(b) För att hitta känslighetsfunktionen vill man hitta överföringsfunktionen från störsignalen $V(s)$ till utsignalen $Y(s)$. Låter man referenssignalen $R(s)$ vara 0 får man

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) + V(s) = \\ &= G(-K \cdot Y(s)) + V(s) \iff \\ Y(s) &= \frac{1}{1 + K \cdot G(s)} V(s) = S(s)V(s) \end{aligned}$$

Detta ger att

$$S(s) = \frac{1}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2 + K} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 1 + K}$$

Svar: Känslighetsfunktionen $S(s)$ är

$$S(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 1 + K}$$

(c) För låga frekvenser ($s = 0$) fås känslighetsfunktionen

$$S(0) = \frac{1}{1 + K}$$

$S(0)$ minskar med ökat K.

Eftersom känslighetsfunktionen är överföringsfunktionen från referenssignalen till reglerfelet kommer ett stort K att minska det stationära felet. Däremot innebär ett ökat K större påfrestningar på aktuatorerna då insignalen till systemet blir större. Från nämnarpolynomet i svaret för (b) kan man även se att systemet kommer oscillera för alla värden $K > 0$ och att dämpningen minskar med ökat K.

3. (a) Det återkopplade systemet ges av

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r(t) \\ &= \begin{pmatrix} -1-l_1 & -l_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r(t)\end{aligned}$$

Det slutna systemets egenvärden fås ur den karakteristiska ekvationen

$$\begin{aligned}0 &= \det(\lambda I - (A - BL)) \\ &= (\lambda + 1 + l_1)(\lambda + 1) + l_2 \\ &= \lambda^2 + (2 + l_1)\lambda + (1 + l_1 + l_2)\end{aligned}$$

Vi önskar placera polerna i $-\alpha$, dvs

$$0 = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2$$

En jämförelse mellan ekvationerna ger $l_1 = 2\alpha - 2$ och $l_2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1$.
Svar: Återkopplingen ges av:

$$u(t) = -(2\alpha - 2 \quad \alpha^2 - 2\alpha + 1)x(t) + r(t).$$

(b)
- Överslängen för det återkopplade systemet är noll.
- Systemets snabbhet ges av polerna avstånd till origo, vilket ger att ett stort värde på α ger en kortare stigtid, medan ett mindre värde ger en längre stigtid.
- I praktigen avgörs dock hur snabbt systemet kan göras av hur stora insignaler som är möjliga.

(c) Nackdelen med förslaget i uppgiften är framförallt att x_2 måste deriveras. Dessutom tas inte hänsyn till informationen insignalen $u(t)$.

(d) Använd en observatör där även hänsyn tas till skattningsfelet:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

Observatörens K-matris måste beräknas så att egenvärdena till

$$(A - KC)$$

placeras i vänster halvplan. Slutligen bildas återkopplingen som

$$u = -L\hat{x} + r$$

4. (a) Med proportionell återkoppling, d v s $F(s) = K$ påverkas endast amplitudkurvan för $G_O(i\omega) = KG(i\omega)$, d v s faskurvan påverkas inte. För att nå fasmarginal $60°$ ska K alltså väljas så att $\mid G_O(i\omega) \mid= 1$ vid den vinkelfrekvens där $\arg G_0(i\omega) = -120°$. Detta inträffas vid ca 0.27 rad/s, och där är $\mid G(i\omega) \mid\approx 3.5$. Det innebär att K ska väljas som $K = 1/3.5 \approx 0.29$.

(b) Överföringsfunktionen från referenssignal till reglerfel ges i detta fall av

$$E(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)} R(s)$$

Eftersom det återkopplade systemet är stabilt kan slutvärdessatsen tillämpas, vilket med $F(s)$ och $G(s)$ enligt ovan och den aktuella referenssignalen, vilken innebär att $R(s) = 0.5/s^2$, ger

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1 + KG(s)} \frac{0.5}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{0.5}{s + sKG(s)} = \frac{0.5}{K} = 1.75$$

(c) Den givna regulatorn är en lag-återkoppling och en förstärkning, vilken kommer att försämra fasmarginalen med som mest $5.7°$. För att bibehålla fasmarginalen måste skärfrekvensen därför flyttas till $\omega_c = 0.24\,\text{rad/s}$, och där är systemets förstärkning 4. Enligt tumregeln väljs $\tau_I = 10/\omega_c \approx 42$. Därefter bestäms K så rätt skärfrekvens fås, d v s $1 = |F(\omega_c i)G(\omega_c i)| \approx 4K$, alltså $K = 1/4$. Med lag-återkoplingen blir det stationära reglerfelet

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{0.5\gamma}{K} = 2\gamma$$

Kravet

$$2\gamma \leq 0.175$$

ger därmed $0 < \gamma \leq 0.0875$.

Detta ger sammantaget regulatorn

$$F(s) = 0.25 \cdot \frac{42s + 1}{42s + 0.0875}$$

5. (a) Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation ges av

$$s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{Kk_0}{\tau} = 0$$

vilket med insatta värden ger $s^2 + 4s + 200K = 0$. Jämförelse med $s^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$ ger $\omega_0^2 = 200K$ samt $2\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{200K} = 4$ vilket ger $K = \frac{1}{25} = 0.04$.

Svar: $K = \frac{1}{25} = 0.04$.

(b) Ekvationen $s^2 + 4s + 200K = 0$ medför att systemets poler ges av $s = -2 \pm \sqrt{4 - 200K}$. För stora K blir polerna komplexa. Realdelen är dock alltid negativ, dvs systemet kan ej bli instabilt.

Svar: Systemet är alltid stabilt.

(c) $G^0(s)$ enligt förutsättningarna innebär att $\Delta G(s) = \alpha$. Då det är känt att $\mid \alpha \mid < 0.5$ innebär robusthetskriteriet kravet $\mid G_c(i\omega) \mid < 1/0.5 = 2$.

Amplitudkurvan får ej överskrida 2 för att stabilitet skall kunna garanteras. Figuren visar att kurvan överskrider detta värde, vilket betyder att stabilitet ej kan garanteras. Amplitudkurvans maxvärde är ca 2.5. Detta innebär att stabilitet kan garanteras om man med säkerhet vet att $\mid \alpha \mid < 0.4$.

Svar: Stabilitet kan endast garanteras om $\mid \alpha \mid < 0.4$.