TENTAMEN I TSRT22 REGLERTEKNIK

SAL:

TID: 2019-01-09 kl. 8:00-13:00

KURS: TSRT22 Reglerteknik

PROVKOD: TEN1

INSTITUTION: ISY

ANTAL UPPGIFTER: 5

ANSVARIG LÄRARE: Svante Gunnarsson, tel. 013-281747,070-3994847

BESÖKER SALEN: cirka kl. 9:00, 10:30 och 12:00

KURSADMINISTRATÖR: Ninna Stensgård, 013-282225, ninna.stensgard@liu.se

TILLÅTNA HJÄLPMEDEL:
1. *T. Glad & L. Ljung*: ”Reglerteknik. Grundläggande teori”
2. Tabeller och formelsamlingar, t.ex.:
   L. Råde & B. Westergren: ”Mathematics handbook”,
   C. Nordling & J. Österman: ”Physics handbook”,
   S. Söderkvist: ”Formler & tabeller”
3. Miniräknare utan färdiga program
4. Svensk-persisk ordbok.

Normala inläsningsanteckningar får finnas i böckerna.

LÖSNINGSFÖRSLAG: Finns på kursens websida efter skrivningens slut.

VISNING av tentan äger rum 2019-01-29, kl. 12.30–13.00 i Ljungeln, B-huset, ingång 27, A-korridoren till höger.

PRELIMINÄRA BETYGSGRÄNSER:	betyg 3	23 poäng
	betyg 4	33 poäng
	betyg 5	43 poäng

OBS! Lösningar till samtliga uppgifter ska presenteras så att alla steg (utom triviala beräkningar) kan följas. Bristande motiveringar ger poängavdrag.

Lycka till!

1. (a) Ett system beskrivs av sambandet

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

där

$$G(s) = \frac{\beta}{s+\alpha}$$

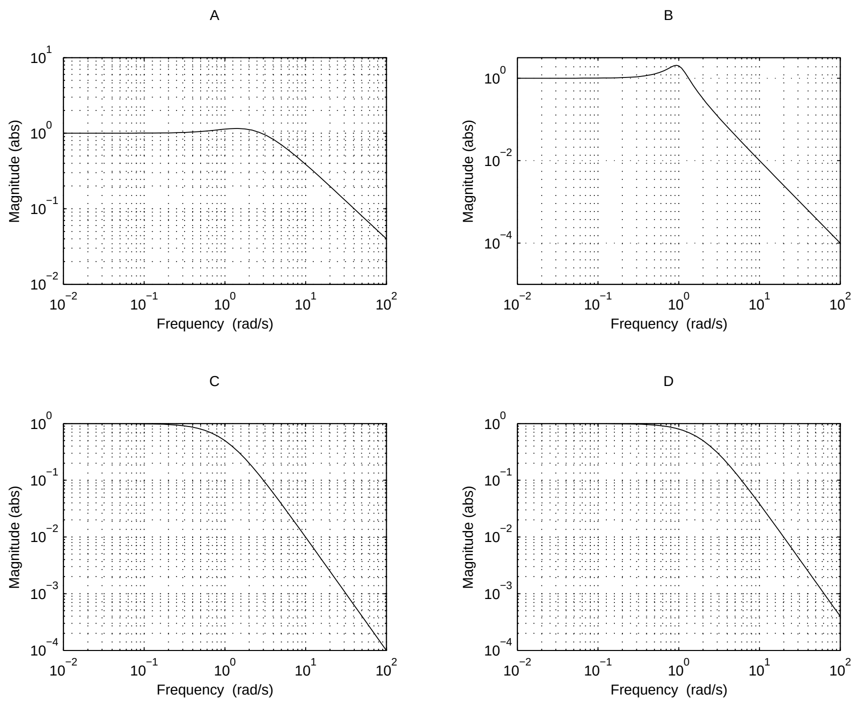
och $\beta \neq 0$. Antag att insignalen är ett steg med amplituden u_0. Beskriv $y(t)$ då $t \to \infty$. (3p)

(b) Betrakta de fyra överföringsfunktionerna nedan.

$$G_1(s) = \frac{4}{(s+2)^2} \qquad G_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{(s^2+s+1)} \qquad G_4(s) = \frac{4(s+1)}{(s+2)^2}$$

I figur 1 visas amplitudkurvorna för dessa överföringsfunktioner. Kombinera kurvorna med överföringsfunktionerna. (4p)



Figur 1: Amplitudkurvor till uppgift 1 b.

(c) Ett mekaniskt system består av en massa och en fjäder. Massan rör sig på ett plan och rörelsen beskrivs av differentialekvationen

$$m\ddot{y}(t) = u(t) - f\dot{y}(t) - ky(t)$$

där $u(t)$ är kraften som verkar på massan och $y(t)$ är massans position. m, f och k betecknar massa, friktionskoefficient respektive fjäderkonstant. Inför tillståndsvariablerna $x_1(t) = y(t)$ och $x_2(t) = \dot{y}(t)$ och ställ upp modellen på tillståndsform. Antag att $m = k = 1$ och $f = 0.2$. Ange absolutbelopp och relativ dämpning för modellens poler. (3p)

2. Ett mekaniskt system beskrivs med modellen

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

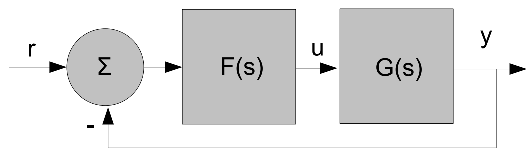
där

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Systemet ska styras med återkopplingen

$$U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$$

enligt figur 2.



Figur 2: Reglersystem

$F(s)$ är en (approximativ) PD-återkoppling med överföringsfunktionen

$$F(s) = K_P + K_D \frac{s}{1 + sT}$$

där koefficienten $T > 0$ används för att göra PD-återkopplingen realiserbar i praktiken.

(a) Ange det återkopplade systemets karakteristiska ekvation. (2p)

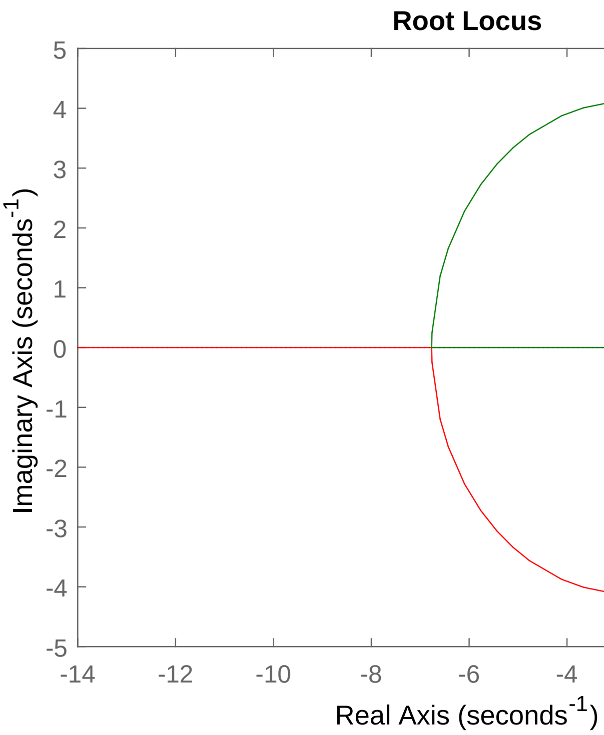
(b) Antag att $T = 0$. Bestäm koefficienterna K_P och K_D så att det återkopplade systemets poler placeras i -2. (3p)

(c) Antag nu att de koefficienter som bestämdes ovan används i fallet att $T > 0$. För att analysera hur det det återkopplade systemets egenskaper beror av T kan man nu använda rotortsmetoden. Inför $\alpha = 1/T$ och skriv den karakteristiska ekvationen på formen

$$P(s) + \alpha Q(s) = 0$$

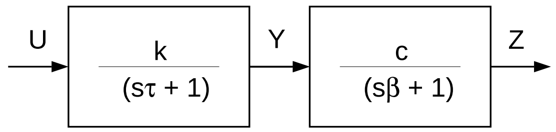
Ange $P(s)$ och $Q(s)$. (1p)

(d) Figur 3 visar hur det återkopplade systemets poler förflyttar sig som funktion av α för $0 < \alpha < \infty$ (och därmed som funktion av T). Kan det återkopplade systemet bli instabilt för något värde på T $(0 < T < \infty)$)? Hur beter sig det återkopplade systemets poler för små respektive stora värden på T? (4p)



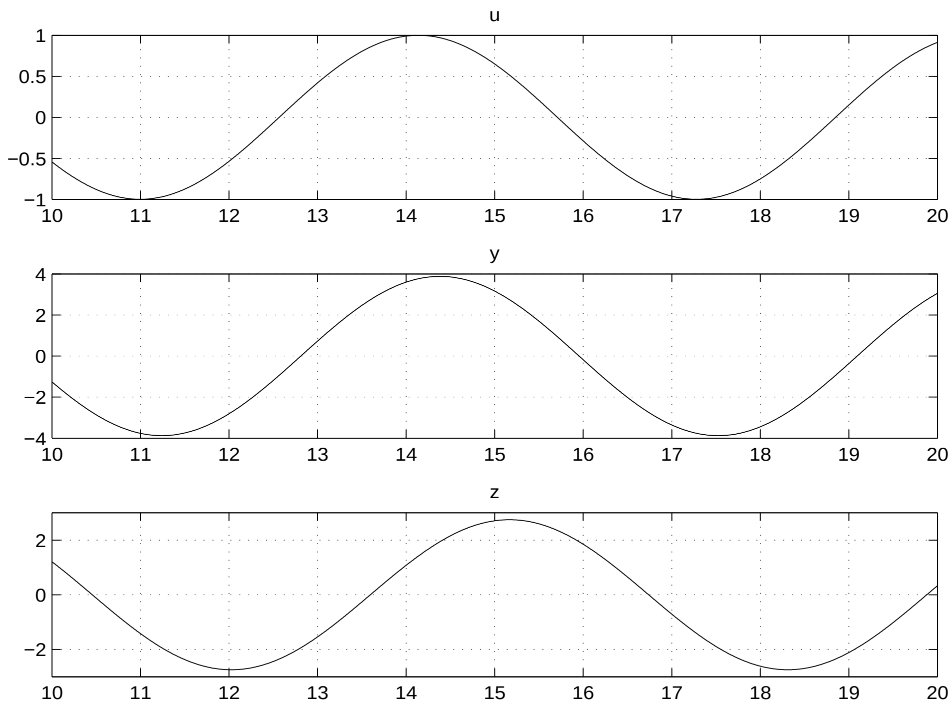
Figur 3: Rotort

3. (a) Betrakta systemet i figur 4.



Figur 4: Blockschema till uppgift 3.a.

För att bestämma koefficienterna c och β låter vi insignalen u vara en sinussignal med amplituden ett. I figur 5 visas signalerna u, y och z. Bestäm koefficienterna c och β. (4p)



Figur 5: Signaler till uppgift 3 a. Tidsskala sekunder.

(b) Ett system beskrivs med modellen

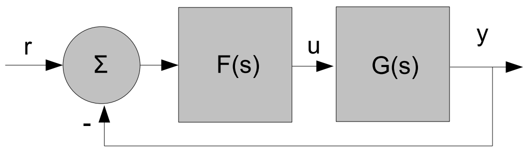
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

där

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)^2}$$

Systemet styrs med återkoppling enligt figur 6 där

$$F(s) = K \cdot \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \cdot \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$



Figur 6: Reglersystem

I figur 7 visas stegsvaret för det återkopplade systemet för fyra olika varianter av överföringsfunktionen $F(s)$. Kombinera stegsvaren med de olika alternativen på $F(s)$. (4p)

$$F(s) = 0.75 \cdot \frac{0.65s + 1}{0.6 \cdot 0.65s + 1} \cdot \frac{3s + 1}{3s} \tag{1}$$

$$F(s) = 1.5 \cdot \frac{0.65s + 1}{0.6 \cdot 0.65s + 1} \cdot \frac{3s + 1}{3s + 0.1} \tag{2}$$

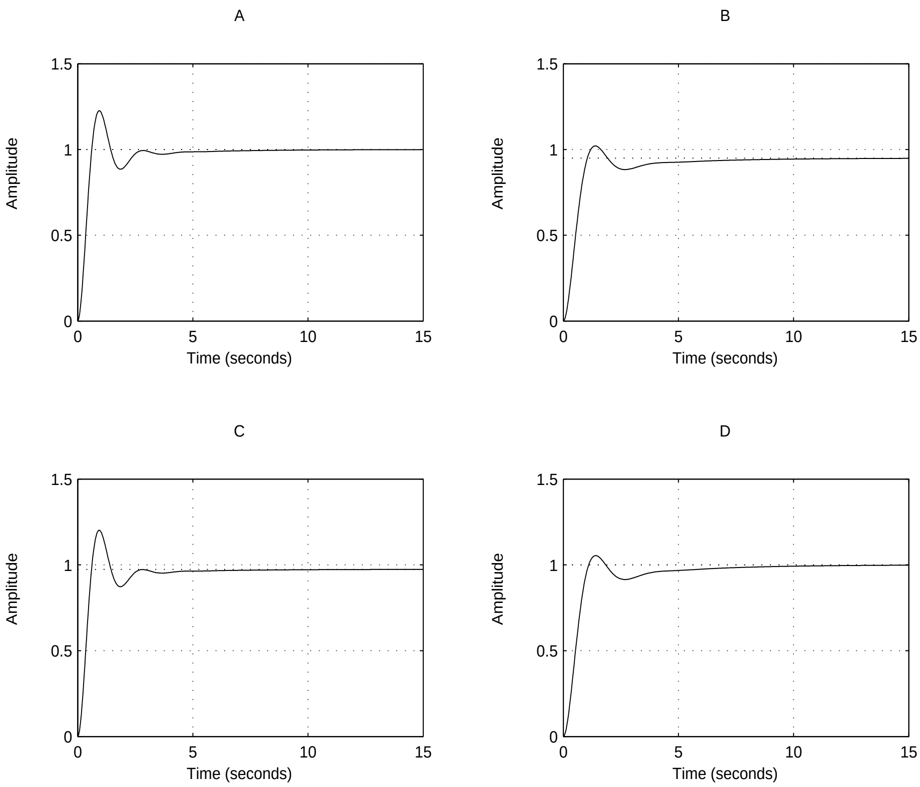
$$F(s) = 0.75 \cdot \frac{0.65s + 1}{0.6 \cdot 0.65s + 1} \cdot \frac{3s + 1}{3s + 0.1} \tag{3}$$

$$F(s) = 1.5 \cdot \frac{0.65s + 1}{0.6 \cdot 0.65s + 1} \cdot \frac{3s + 1}{3s} \tag{4}$$

(c) Betrakta åter systemet ovan och antag att det styrs enligt figur 6 där i detta fall

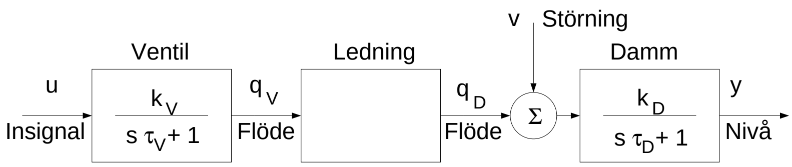
$$F(s) = K$$

Bestäm K så att känslighetsfunktionens absolutbelopp vid $\omega = 0$ blir mindre än 0.01. (3p)



Figur 7: Stegsvar till uppgift 3 b.

4. (a) En förenklad beskrivning av ett system för reglering av vattennivån i en damm ges av figur 8.



Figur 8: Dammsystem

Antag att inverkan av ledningen försummas, d v s $q(t) = q_V(t) = q_D(t)$. Verifiera att systemet med hjälp av tillståndsvariablerna $x_1(t) = y(t)$ och $x_2(t) = q(t)$ kan beskrivas på tillståndsform som

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_D} & \frac{k_D}{\tau_D} \\ 0 & -\frac{1}{\tau_V} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_V}{\tau_V} \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} \frac{k_D}{\tau_D} \\ 0 \end{pmatrix} v(t) \qquad y(t) = (1 \;\; 0)x(t)$$

(2p)

(b) Sätt $k_V = 5, \tau_V = 1, k_D = 2, \tau_D = 3$ och antag att man kan mäta både flöde och dammnivå. Bestäm en tillståndsåterkoppling sådan att det återkopplade systemets poler placeras i $-\alpha$. Skissa hur återkopplingskoefficienterna beror av α. (5p)

(c) Antag att referenssignalen är noll, d v s $r(t) = 0$, och att systemet påverkas av en konstant störning, d v s $v(t) = v_0$. Vad blir nivån $y(t)$ i stationärt tillstånd? **Tips**: Gör beräkningen med allmänt l_1 och l_2 och sätt in de beräknade värdena på slutet. (3p)

5. Betrakta ett reglersystem påverkat av både system- och mätstörning. Systemet beskrivs av

$$Z(s) = \frac{1}{s+1} U(s) + V(s)$$

där $V(s)$ betecknar systemstörningen. Systemet styrs med den proportionella återkopplingen

$$U(s) = K(R(s) - (Z(s) + N(s)))$$

där $K > 0$ och $N(s)$ betecknar en mätstörning. Reglersystemet visas i läroboken i figur 6.3, men i vårt fall gäller att $F_r(s) = F_y(s) = F(s) = K$.

(a) Antag att $v(t) = 0$ och bestäm sambandet mellan utsignalen Z, referenssignalen R och mätstörningen N. (1p)

(b) Skissa amplitudkurvan för känslighetsfunktionen $S(s)$ och verifiera att återkopplingen alltid gör nytta i den meningen att känslighetsfunktionens absolutbelopp alltid är mindre än ett. (2p)

(c) Skissa amplitudkurvan för den komplementära känslighetsfunktionen $T(s)$ och bestäm för vilka K och ω som

$$\mid T(i\omega) \mid < \mid S(i\omega) \mid$$

(3p)

(d) Antag att referenssignalen är $r(t) = \sin t$ och att mätstörningen ges av $n(t) = \sin \omega_1 t$, samt att $v(t) = 0$. Antag vidare att vi kräver att förstärkningen från $r(t)$ respektive $n(t)$ till $e(t)$, där $e(t) = r(t) - z(t)$, skall vara mindre än 0.1 för båda signalerna. Vilket krav på mätstörningens frekvens ω_1 ger detta? (4p)

Lösningar till tentamen i Reglerteknik TSRT22

Tentamensdatum: 2019-01-09

Svante Gunnarsson

1. (a) Systemet $G(s)$ är insignal-utsignalstabilt för $\alpha > 0$. Det innebär att stegsvaret $y(t)$ går mot ett slutvärde endast då $\alpha > 0$. För $\alpha > 0$ gäller slutvärdesteoremet

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{\beta}{s+\alpha}\frac{u_0}{s} = \frac{\beta u_0}{\alpha}$$

Om $\alpha \leq 0$ så följer det att $|y(t)| \to \infty$ då $t \to \infty$.

(b) Samtliga system har två poler och statisk förstärkning 1.

$G_4(s)$ har två poler i -2 samt ett nollställe i -1, vilket innebär att amplitudkurvan kommer att börja luta "uppåt" omkring $\omega = 1$ för att sedan börja luta "nedåt" efter $\omega = 2$. Således $G_4(s) = A$.

$G_3(s)$ har ett komplexkonjugerat polpar i $-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Detta innebär att amplitudkurvan har en resonanstopp, och den enda amplitudkurvan som uppfyller detta krav är B. Således $G_3(s) = B$.

$G_1(s)$ och $G_2(s)$ har samma principiella form eftersom de har samma antal poler och nollställen, endast reella dubbelpoler och samma stationära förstärkning. Dock kommer $G_1(s)$ ha större bandbredd än $G_2(s)$ eftersom $G_1(s)$ har sina poler längre in i vänster halvplan än $G_2(s)$. Högre bandbredd betyder att amplitudkurvan bryter av först vid högre frekvenser. Således är $G_1(s) = D$ och $G_2(s) = C$.

(c) Systemet är $m\ddot{y}(t) = u(t) - f\dot{y}(t) - ky(t)$. Tillstånden

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned}$$

har därmed derivatorna

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{m}(u(t) - fx_2(t) - kx_1(t)) \end{aligned}$$

som kan skrivas på formen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -f/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Med värdena $m = k = 1$ och $f = 0.2$ insatta får vi systemet

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

För att ta fram absolutbeloppet och den relativa dämpningen för modellens poler behöver vi den karakteristiska ekvationen, vilken fås via

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

vilket ger

$$s^2 + 0.2s + 1$$

Sidan 37 i Glad&Ljung ger sedan absolutbeloppet $\omega_0 = 1$ och den relativa dämpningen $\zeta = 0.1$.

2. (a) Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation fås via överföringsfunktionen

$$G_C(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$$

vilket med

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \quad F(s) = K_p + K_d \frac{s}{1+sT}$$

ger

$$G_C(s) = \frac{s(K_pT + K_d) + K_p}{s^3T + s^2 + s(K_pT + K_d) + K_p}$$

Den karakteristiska ekvationen är således

$$Ts^3 + s^2 + s(TK_p + K_d) + K_p = 0$$

om $T \neq 0$ och

$$s^2 + sK_d + K_p = 0$$

om $T = 0$.

(b) Ifall systemets poler ska vara placerade i -2 om $T = 0$ så ska den karakteristiska ekvationen för systemet vara $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4 = 0$. K_d och K_p i (**??**) kan därmed enkelt identifieras som $K_d = 4$ och $K_p = 4$.

(c) Med $\alpha = 1/T$ fås den karakteristiska ekvationen

$$s^3 + \alpha s^2 + (4 + 4\alpha)s + 4\alpha = 0$$
$$\Leftrightarrow s^3 + 4s + \alpha(s^2 + 4s + 4) = 0$$

vilket innebär

$$P(s) = s^3 + 4s = s(s^2 + 4) = s(s - 2i)(s + 2i)$$
$$Q(s) = s^2 + 4s + 4 = (s + 2)(s + 2)$$

(d) För små värden på α, d v s stort T har det återkopplade systemet två dåligt dämpade komplexkonjugerade poler samt en reell pol nära origo. För ökande α, d v s minskande T rör sig de komplexkonjugerade polerna allt bättre dämpade och möts på reella realaxeln. Därefter rör sig en utmed negativa realaxeln mot $-\infty$ och en rör sig mot (den dubbla) slutpunkten -2. Polen som startar i origo går åt vänster utmed negativa realaxeln mot slutpunkten i -2. Fallet när $\alpha \to \infty$ motsvarar alltså situationen då $T = 0$. Det återkopplade systemet är stabilt för alla $0 < \alpha < \infty$. Det är oscillativt för små värden på α, d v s stora värden på T.

3. (a) Ur figuren fås

$$Z(s) = \frac{c}{s\beta + 1} Y(s)$$

För en given signal $y(t) = A\sin(\omega t)$ så ges utsignalen (efter transienter) av

$$z(t) = A\left|\frac{c}{\beta\omega i + 1}\right| \sin\big(\omega t - \arctan(\beta)\big)$$

Ur figuren avläses amplituden och vinkelfrekvensen för $y(t)$ till $A = 4$ och $\omega = 1\,\text{rad/s}$ och för $z(t)$ avläses amplituden 2.75 och fasförskjutningen $-0.8\,\text{rad}$. (Observera att man alltså inte behöver göra någon avläsning i den övre plotten!) Detta ger följande ekvationer:

$$4\frac{c}{\sqrt{\beta^2+1}} = 2.75$$
$$-\arctan(\beta) = -0.8$$

med lösning $\beta \approx 1$ och $c \approx 1$.

(b) Den angivna överföringsfunktionen är en lead-lag-återkoppling med $\tau_D = 0.65, \beta = 0.6$ och $\tau_I = 3$ samt några olika värden på K och γ. Från stegsvaren kan man se att varken A eller D har något stationärt fel till skillnad från B och C. Överföringsfunktionerna (1) och (4) har en lag-del där γ-parametern är 0 vilket innebär att inget stationärt fel fås om dessa regulatorer används på det givna systemet. Därför måste stegsvar A och D höra ihop med regulatorerna (1) och (4). Den enda skillnaden mellan regulator (1) och (4) är K. Större värde på K innebär ett snabbare system, men också större översläng. av amplitudkurvan vilket ger en större bandbredd hos det slutna Av stegsvaren A och D är det A som har kortast stigtid och av överföringsfunktionerna (1) och (4) är det (4) som har störst K-värde. Således hör A ihop med (4) medan D hör ihop med (1).

Kvar att para ihop är nu stegsvar B och C samt regulatorerna (2) och (3). Jämförs uttrycken för de två regulatorerna ser man återigen att endast K skiljer sig åt. Således ska stegsvar C, med kortast stigtid, paras ihop med regulator (2), med störst K-värde, och B med (3).

Svar: (1)-D, (2)-C, (3)-B, (4)-A

(c) Känslighetsfunktionen ges av

$$S(s) = \frac{1}{1+F(s)G(s)} = \frac{1}{1+\frac{5K}{(s+1)^2}} = \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+5K} = \frac{(s+1)^2}{s^2+2s+1+5K} \tag{1}$$

Absolutbeloppet av känslighetsfunktionen vid $\omega = 0$ ges då av

$$|S(0)| = \frac{1}{1+5K}$$

Det givna kravet ger att

$$\frac{1}{1+5K} < 0.01$$

vilket ger $K > 99/5 \approx 20$.

4. (a) Modellen med insatta koefficientvärden ges av

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

med matriserna

$$A = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Polerna ges av karaktäristiska ekvationen $\det(sI - A) = 0$, d v s

$$\det(sI - A) = \det\begin{pmatrix} s+1/3 & -2/3 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} = (s+1/3)(s+1) = 0$$

Svar: Poler i $s = -1/3$ och $s = -1$.
Tillståndsåterkopplingen

$$u(t) = -Lx(t) + r(t)$$

ger

$$\dot{x}(t) = (A - BL)x(t) + Br(t)$$

med den karakteristiska ekvationen

$$\det(sI - A + BL) = \det\begin{pmatrix} s+1/3 & -2/3 \\ 5l_1 & s+1+5l_2 \end{pmatrix} = (s+1/3)(s+1+5l_2) + \frac{10}{3}l_1 =$$

$$= s^2 + (\frac{4}{3} + 5l_2)s + \frac{1}{3}(1 + 5l_2 + 10l_1)$$

Återkoppling som placerar polerna i $-\alpha$ motsvarar en karakteristisk ekvation

$$(s+\alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 = 0$$

vilket ger ekvationerna

$$\frac{4}{3} + 5l_2 = 2\alpha$$

och

$$\frac{1}{3}(1 + 5l_2 + 10l_1) = \alpha^2$$

Ur dessa ekvationer kan l_1 och l_2 lösas ut och lösningarna blir

$$\begin{aligned}l_1 &= 0.3(\alpha - \frac{1}{3})^2\\ l_2 &= 0.4(\alpha - \frac{2}{3})\end{aligned}$$

(b) Det återkopplade systemet ges av

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -5l_1 & -1-5l_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} r(t) + \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix} v(t) \qquad y(t) = (1 \;\; 0)x(t)$$

För $v(t) = v_0$ gäller i stationärt tillstånd att $\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = 0$, vilket ger

$$x_1(t) = 2x_2(t) + 2v_0$$

och

$$(1 + 5l_2)x_2(t) = -5l_1 x_1(t)$$

Detta ger

$$x_2(t) = \frac{-5l_1}{1 + 5l_2}x_1(t)$$

vilket insatt i den första ekvationen ger

$$x_1(t)(1 + \frac{10l_1}{1+5l_2}) = 2v_0$$

$$y(t) = x_1(t) = \frac{1 + 5l_2}{1 + 5l_2 + 10l_1}2v_0$$

Med l_1 och l_2 enligt ovan fås att i stationärt tillstånd ges $y(t)$ av

$$y(t) = \frac{6\alpha - 1}{3\alpha^2} \cdot \frac{2}{3}v_0$$

5. (a)

$$Z(s) = \frac{1}{s+1}K(R(s) - (Z(s) + N(s))) \iff$$
$$Z(s) = \frac{K}{s+1+K}R(s) - \frac{K}{s+1+K}N(s) = G_c(s)R(s) - T(s)N(s)$$

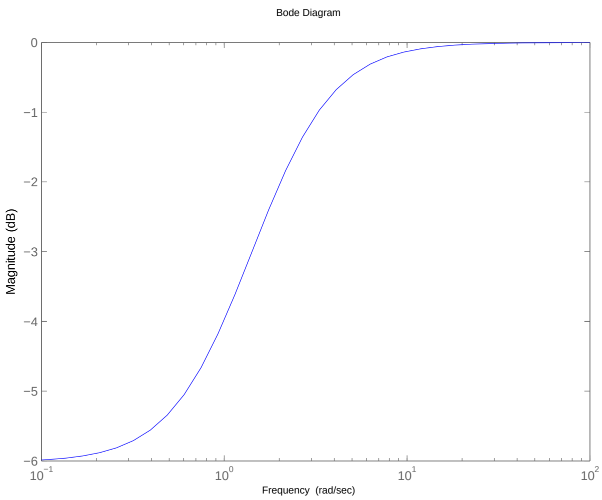
där vi definierar känslighetsfunktionen och komplementära känslighetsfunktionen

$$G_c(s) = \frac{K}{s+1+K}$$
$$T(s) = \frac{K}{s+1+K}$$

(b)

$$S(s) = 1 - T(s) = \frac{s+1}{s+1+K}$$
$$|S(i\omega)| = \left|\frac{i\omega+1}{i\omega+1+K}\right| = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{(1+K)^2+\omega^2}} < 1 \; \forall \omega, K > 0$$

Figur 1 visar hur amplitudkurvan ser ut då $K = 1$.



Figur 1: Amplitudkurvan för känslighetsfunktionen då $K = 1$

(c)

$$|T(i\omega)| = \left|\frac{K}{i\omega+1+K}\right| = \frac{K}{\sqrt{(1+K)^2+\omega^2}}$$

$$|T(i\omega)| < |S(i\omega)| \iff \frac{K}{\sqrt{(1+K)^2+\omega^2}} < \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{(1+K)^2+\omega^2}} \iff$$
$$K < \sqrt{1+\omega^2}$$

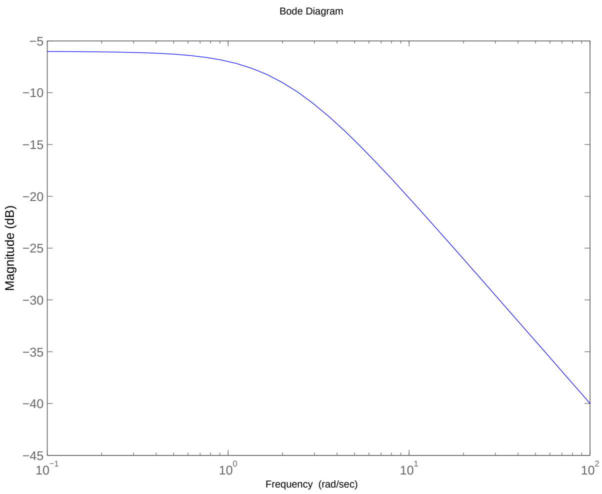
För att detta ska gälla för alla ω krävs alltså $K < 1$. Figur 2 visar hur amplitudkurvan ser ut då $K = 1$.

(d) Felet är

$$E(s) = R(s) - Z(s) = R(s) - T(s)R(s) - T(s)N(s) = S(s)R(s) - T(s)N(s)$$

Vi börjar med att se till att förstärkningen från referenssignalen till felet är mindre än 0.1

$$|S(i\omega)|_{\omega=1} < 0.1$$
$$\frac{\sqrt{1+1^2}}{\sqrt{(1+K)^2+1^2}} < 0.1$$
$$K > \sqrt{199} - 1 \approx 13.11$$



Figur 2: Amplitudkurvan för komplementära känslighetsfunktionen då $K = 1$

Kravet på dämpning av bruset kan ses som att

$$\begin{aligned} |T(i\omega)|_{\omega=\omega_1} &< 0.1 \\ \frac{K}{\sqrt{(1+K)^2+\omega_1^2}} &< 0.1 \\ \omega_1 &> \sqrt{100K^2-(1+K)^2} \end{aligned}$$