TENTAMEN I TSRT22, TSRT19 REGLERTEKNIK

SAL:

TID: 2018-10-26 kl. 14:00-19:00

KURS: TSRT22, TSRT19 Reglerteknik

PROVKOD: TEN1

INSTITUTION: ISY

ANTAL UPPGIFTER: 5

ANSVARIG LÄRARE: Svante Gunnarsson, tel. 013-281747,070-3994847

BESÖKER SALEN: cirka kl. 15:00, 16:30 och 18:00

KURSADMINISTRATÖR: Ninna Stensgård, 013-282225,
ninna.stensgard@liu.se

TILLÅTNA HJÄLPMEDEL:

1. *T. Glad & L. Ljung*: "Reglerteknik. Grundläggande teori"
2. Tabeller och formelsamlingar, t.ex.:
   L. Råde & B. Westergren: "Mathematics handbook",
   C. Nordling & J. Österman: "Physics handbook",
   S. Söderkvist: "Formler & tabeller"
3. Miniräknare utan färdiga program
4. Svensk-persisk ordbok.

Normala inläsningsanteckningar får finnas i böckerna.

LÖSNINGSFÖRSLAG: Finns på kursens websida efter skrivningens slut.

VISNING av tentan äger rum 2018-11-21, kl. 12.30–13.00 i Ljungeln, B-huset, ingång 27, A-korridoren till höger.

PRELIMINÄRA BETYGSGRÄNSER:	betyg 3	23 poäng
	betyg 4	33 poäng
	betyg 5	43 poäng

OBS! Lösningar till samtliga uppgifter ska presenteras så att alla steg (utom triviala beräkningar) kan följas. Bristande motiveringar ger poängavdrag.

Lycka till!

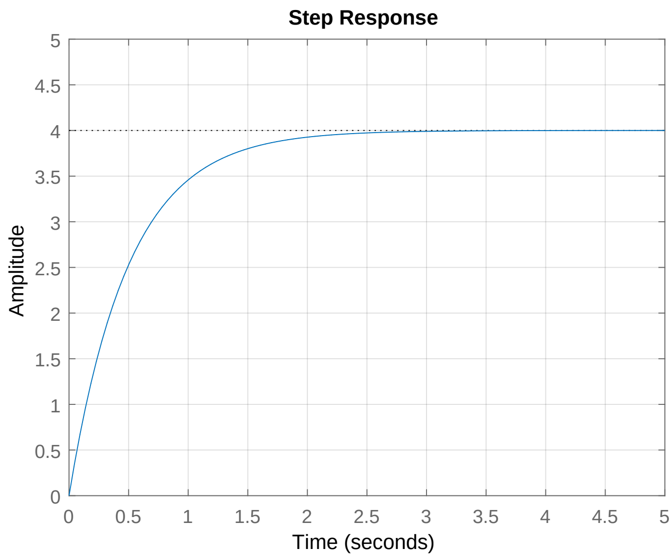
1. (a) Ett system beskrivs av sambandet

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

där

$$G(s) = \frac{b}{s+a}$$

För att bestämma koefficienterna a och b låter man insignalen vara ett steg med amplitud två. Det resulterande stegsvaret ges av figur 1. Bestäm a och b. (3p)



Figur 1: Stegsvar till uppgift 1.a.

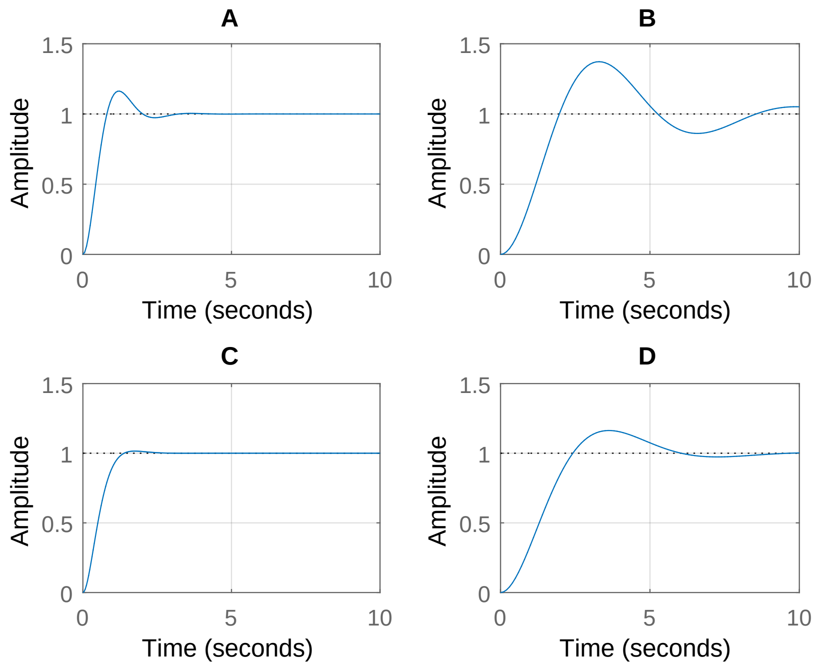
(b) I figur 2 nedan visas stegsvaren för systemet

$$Y(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} U(s)$$

för följande fyra kombinationer av koefficienter:

(i): $\omega_0 = 3, \zeta = 0.8$, (ii): $\omega_0 = 3, \zeta = 0.5$,
(iii): $\omega_0 = 1, \zeta = 0.5$, (iv): $\omega_0 = 1, \zeta = 0.2$.

Kombinera figurerna och parametervärdena. (4p)

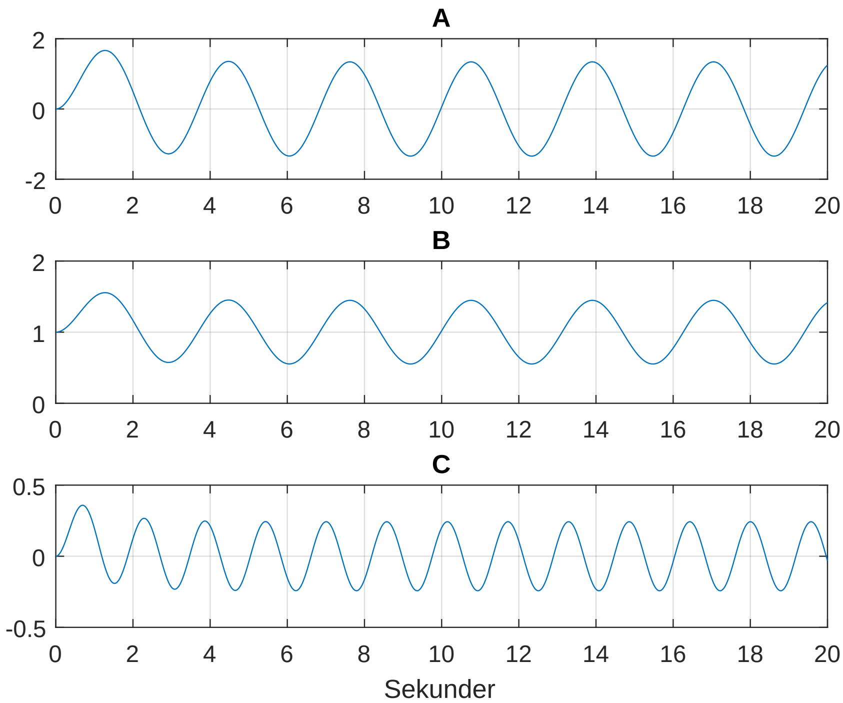


Figur 2: Stegsvar till uppgift 1.b.

(c) Ivar och Ida har gjort några experiment med ett system som beskrivs med modellen

$$Y(s) = \frac{a}{s+a} U(s)$$

På grund av datorproblem har det blivit lite rörigt bland filer och figurer, och de behöver nu din hjälp för att reda ut detta. Antag att insignalen till systemet var $u(t) = \sin 2t$. Ange för var och en av kurvorna i figur 3 varför de **inte** kan vara utsignal från systemet med denna insignal. (3p)



Figur 3: Utsignaler till uppgift 1.c.

2. Rörelsen hos en robotarm kan förenklat beskrivas med modellen

$$\ddot{y}(t) = u(t)$$

d v s

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}U(s)$$

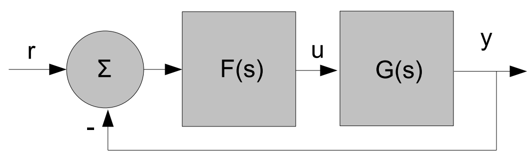
Antag att armen styrs med PD-återkoppling på formen

$$U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$$

där

$$F(s) = K_P + K_D s$$

enligt figur 4.



Figur 4: Reglersystem

(a) Verifiera att det återkopplade systemet ges av uttrycken nedan. (1p)

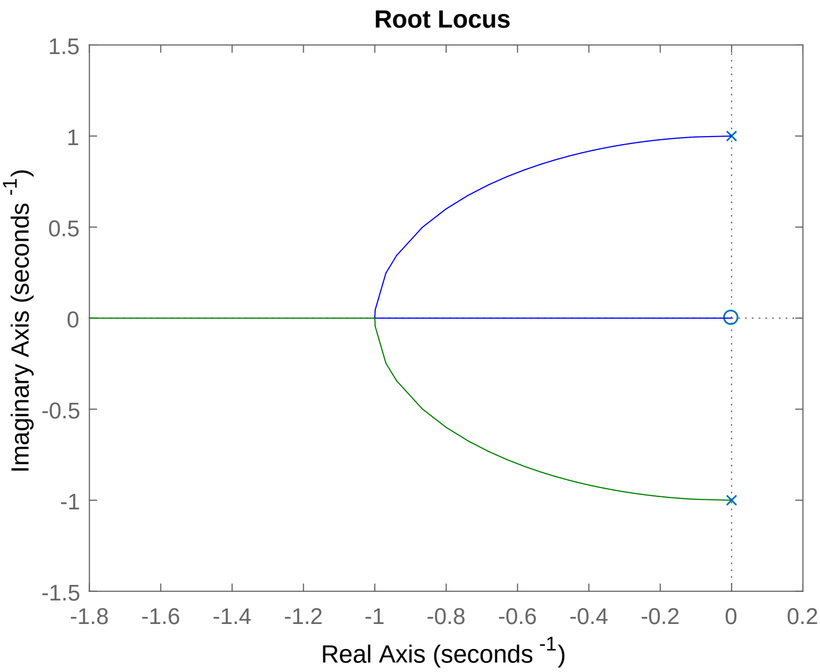
$$Y(s) = G_C(s)R(s)$$

där

$$G_C(s) = \frac{K_D s + K_P}{s^2 + K_D s + K_P}$$

(b) Sätt $K_P = 1$ och bestäm K_D så att det återkopplade systemets poler får relativt dämpning $\zeta = 0.7$. (2p)

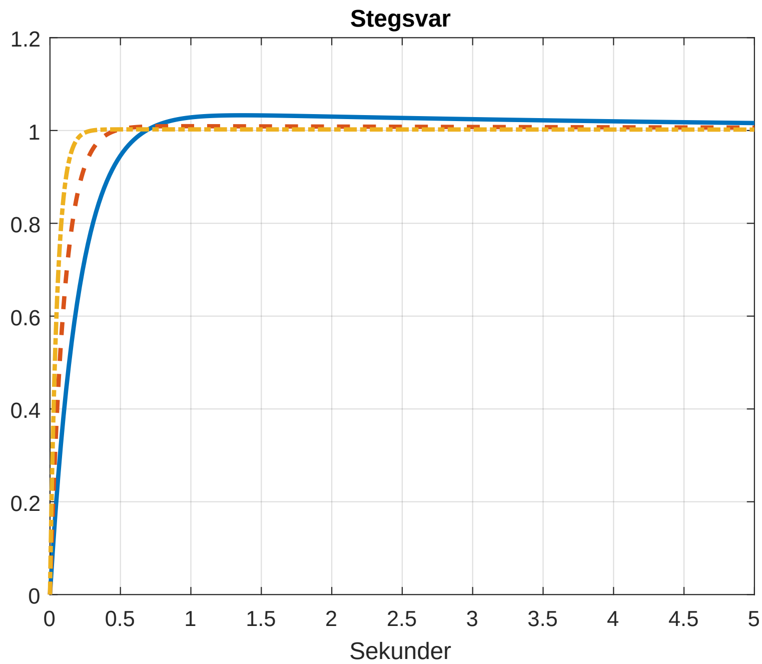
(c) I figur 5 visas rotorten för det återkopplade systemets karakteristiska ekvation om man sätter $K_P = 1$ och låter K_D variera från 0 och uppåt. Beskriv i ord hur det återkopplade systemets poler förflyttas när K_D ökar. Verifiera också att den karakteristiska ekvationen har en reell dubbelrot för $K_D = 2$. (3p)



Figur 5: Rotort till uppgift 2.c.

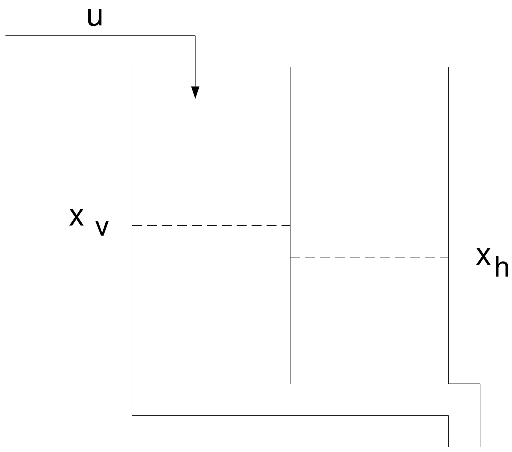
(d) I figur 6 visas det återkopplade systemets stegsvar för $K_P = 1$ och några olika värden på K_D. Kurvorna säger att det återkopplade systemet blir snabbare för ökande K_D. På vilket sätt tycks detta strida mot vad rotorten säger? (2p)

(e) Förklara det som kan uppfattas som en motsägelse i uppgift d.
Tips: Titta på hela $G_C(s)$, d v s både täljare och nämnare. (2p)



Figur 6: Stegsvar till uppgift 2.d. Heldragen: $K_D = 5$. Streckad: $K_D = 10$. Punktstreckad: $K_D = 20$.

3. Betrakta ett system bestående av två tankar enligt figur 7.



Figur 7: Tanksystem

Om man låter nivå i de båda tankarna betecknas med $x_1(t)$ respektive $x_2(t)$, (d v s $x_1(t) = x_v(t)$ och $x_2(t) = x_h(t)$ i figuren) kan systemet (efter linjärisering) beskrivas på tillståndsform med ekvationerna

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

I modellen är även koefficienter som beskriver hålet mellan tankarna och utloppshålet satta till ett.

(a) Ange modellens poler och nollställen. (3p)

(b) Antag att inflödet är konstant, d v s $u(t) = \bar{u}$, och att de båda tanknivåerna gått mot konstanta värden $\bar{x}_1$ respektive $\bar{x}_2$. Verifiera att det då alltid gäller att $\bar{x}_1 = 2\bar{x}_2$ d v s att det alltid är högre nivå i den vänstra tanken än i den högra tanken. (2p)

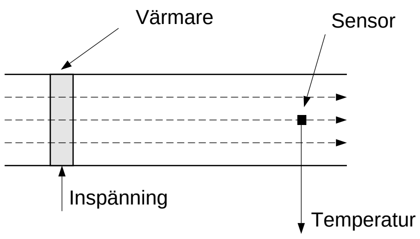
(c) Varför är resultatet i föregående uppgift fysikaliskt rimligt? (1p)

(d) Antag att båda nivåerna (tillståndsvariablerna) kan mätas. Bestäm en tillståndsåterkoppling på formen

$$u(t) = -Lx(t) + r(t)$$

sådan att det återkopplade systemets poler placeras i -2. (4p)

4. På samma sätt som förra året sitter Ivar och Emma och funderar på en del av värmesystemet i sitt nya hus, som dock nu är renoverat en hel del sedan förra året. (Medan de gör det lyssnar de på Hungry Heart med Bruce Springsteen and The E Street Band från Nassau Coliseum, 1980.) Delsystemet är en process för uppvärmning av luft som beskrivs översiktligt i figur 8.



Figur 8: Värmeprocess.

Processen antas kunna beskrivas av modellen

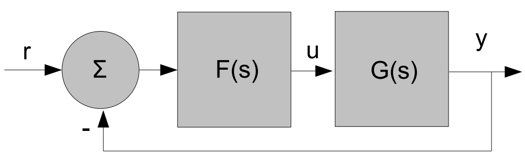
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

där

$$G(s) = \frac{2}{0.25s + 1} e^{-0.2s}$$

och där tidsfördröjningen orsakas av att luften strömmar en sträcka genom ett rör innan temperaturen mäts. Systemets Bodediagram i figur 11 sist i tentan.

Antag att temperaturen styrs med reglersystemet i figur 9



Figur 9: Reglersystem

(a) Antag att temperaturen styrs med proportionell återkoppling d v s $F(s) = K$. Hur stort blir det stationära felet om $r(t)$ är ett enhetssteg? (2p)

(b) Antag fortfarande att temperaturen styrs med proportionell återkoppling

$$U(s) = K(R(s) - Y(s))$$

och att man vill att fasmarginalen ska vara minst 55°. Vilken skärfrekvens kan uppnås och för vilket värde på K uppnås detta? (2p)

(c) Antag nu att systemet för att reducera det stationära felet istället ska styras med en återkoppling där

$$F(s) = K\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

Bestäm återkopplingen så att följande krav uppfylls:

- $e_0 = 0$
- $\phi_m \geq 55°$
- ω_c så stor som möjligt.

(4p)

(d) Återkopplingen ovan är konstruerad under antagandet att tidsfördröjningen är 0.2 sek. Hur mycket större kan tidsfördröjningen vara innan det återkopplade systemet blir instabilt? (2p)

5. Ett system antas kunna beskrivas av modellen

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

där

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

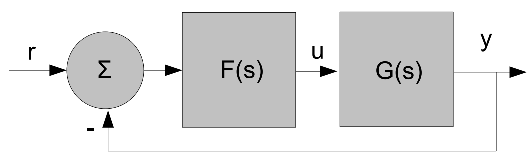
Systemet styrs med återkopplingen

$$U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$$

där

$$F(s) = K \cdot \frac{s+1}{s}$$

enligt figuren nedan, där som vanligt målet är att utsignalen ska följa referenssignalen så bra som möjligt.

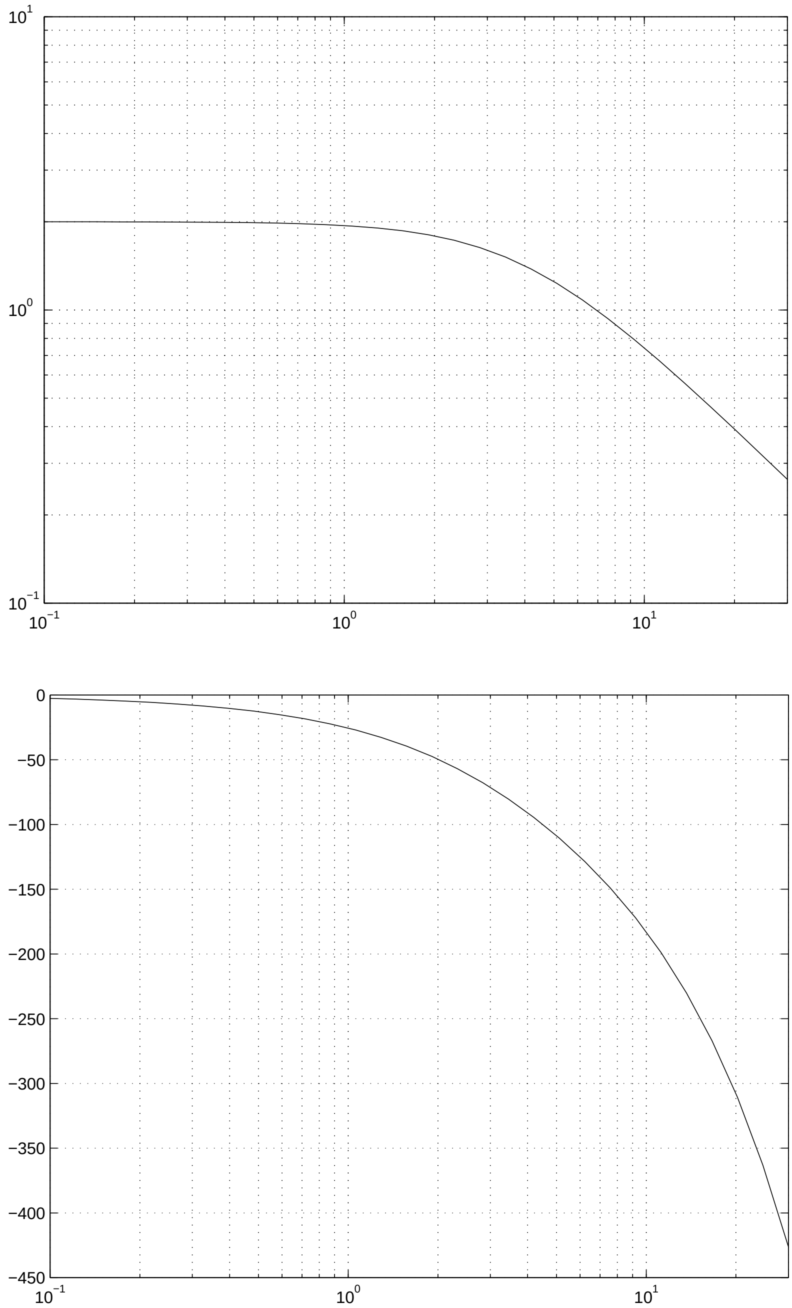


Figur 10: Reglersystem

(a) Ange bandbredden för det återkopplade systemet som funktion av förstärkningen K. (2p)

(b) Antag att referenssignalen är sinusformad, d v s $r(t) = \sin \omega t$. Ange ett villkor på K för att förstärkningen från referenssignalen $r(t)$ till styrsignalen $u(t)$ skall vara mindre än ett för alla ω. (3p)

(c) Antag återigen att $r(t) = \sin \omega t$. Ange ett villkor på K för att förstärkningen från referenssignalen $r(t)$ till styrsignalens derivata $\dot{u}(t)$ skall vara mindre än ett för alla ω i intervallet $0 \leq \omega \leq 10$. (5p)



Figur 11: Bodediagram till uppgift 4

Lösningsförslag till tentamen i TSRT22, TSRT19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2018-10-26

Svante Gunnarsson

1. (a) Överföringsfunktionen kan skrivas om enligt

$$G(s) = \frac{b}{s+a} = \frac{k}{Ts+1}$$

där $T = 1/a$ och $k = b/a$. Figuren ger att $T = 0.5$ vilket ger $a = 2$. Insignalen $u(t) = 2$ ger att utsignalen går mot $k \cdot 2$. Figuren ger därmed att $k \cdot 2 = 4$ vilket ger $b = 4$, d v s

Svar:

$$G(s) = \frac{4}{s+2}$$

(b) Stegsvaren i A och D har lika stor överläng (samma värde på ζ) men stegsvaret i A är snabbare, vilket svarar mot ett större ω_0, d v s poler längre från origo. Detta ger A - (ii) och D - (iii). Stegsvaret i B har störst översläng, vilket svaras mot lägst värde på ζ. Detta ger B - (iv). Slutligen är stegsvaret i C det mest väldämpade och det hör därmed samman med (i), d v s C - (i).

Svar: A - (ii), B - (iv), C - (i) och D - (iii).

(c) A Det givna systemets förstärkning är mindre än ett, d v s $\mid G(i\omega) \mid \leq 1$, för alla ω. Insignalen har amplituden ett, och därmed kan inte utsignalen har en amplitud större än ett.

B Insignalen är en sinussignal som varierar kring noll, och därmed kommer utsignalen att variera kring noll. Signalen i B varierar kring ett vilket inte kan inträffa under de givna förutsättnignarna.

C Utsignalen har dubbelt hög vinkelfrekvens (hälften så stor periodtid) som insignalen, vilket inte kan inträffa för den typ av system vi tittar på.

2. (a) Det återkopplade systemets överföringsfunktion, från r till y ges av

$$G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

Genom att sätta in $F(s)$ och $G(s)$ enligt uppgiften fås det önskade resultatet.

(b) Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation ges, med insatt $K_P = 1$, av

$$s^2 + K_D s + 1 = 0$$

En jämförelse med ekvationen

$$s^2 + 2\omega_0 \zeta s + \omega_0 = 0$$

ger att i detta fall är $\omega_0 = 1$ och $2\zeta = K_D$. Kravet på att $\zeta = 0.7$ ger därmed $K_D = 1.4$.
Svar: $K_D = 1.4$

(c) Rotoren säger följande:

- För $K_D = 0$ är det återkopplade systemets poler komplexa och ligger på imaginäraxeln, d v s det återkopplade systemet är ej insignal-utsignalstabilt.
- För ökande K_D rör sig polerna in i vänster halvplan, d v s systemet blir insignal-utsignalstabilt, för att för ett visst värde på K_D mötas på negativa realaxeln.
- För ytterligare ökande K_D rör sig en pol utmed negtiva realaxeln mot $-\infty$ och en pol mot origo.
- Om man enbart ser till polerna för $G_C(s)$ skulle detta innebära att det återkopplade systemet blir allt långsammare när K_D växer, eftersom en pol kommer allt närmare origo.

(d) Stegsvaren säger att det återkopplade systemet blir snabbare för större värde på K_D, vilket tycks motsäga observationen i föregående uppgift, d v s att en av det återkopplade systemets poler närmar sig origo för växande K_D.

(e) I detta fall måste man titta på hela överföringsfunktionen $G_c(s)$, d v s både täljare och nämnare. $G_C(s)$ har även ett nollställe i $s = -1/K_D$, vilket innebär att detta också rör sig mot origo för ökande K_D. $G_C(s)$ kommer därmed att ha en faktor i täljaren som i princip kan förkortas bort mot den faktor som hör till den långsamma polen, inverkan av den långsamma polen kommer därför att försvinna, och det blir den andra (snabba) polen som kommer att avgöra stegsvarets utseende.

3. (a) Överföringsfunktionen ges av uttrycket (se boken s 162)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

och med insatta matriser enligt uppgiften ger detta

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}$$

Systemet saknar allstå nollstälen. Polerna ges av rötterna till

$$s^2 + 3s + 1 = 0$$

vilket ger rötterna $s = -0.38$ och $s = -2.62$.
Svar: Systemets poler är -0.38 och -2.62. Nollställen saknas.

(b) När insignalen är konstant $u = \bar{u}$ fås i stationärt tillstånd, d v s då $\dot{x}_1 = 0$ och $\dot{x}_2 = 0$ att

$$0 = -x_1 + x_2 + \bar{u}$$

och

$$0 = x_1 - 2x_2$$

där den andra ekvationen ger det sökta sambandet, d v s

$$x_1 = 2x_2$$

(c) I stationärt tillstånd är det konstant nivå i båda tankarna, d v s det rinner in lika mycket som det rinner ut. Eftersom det rinner ut vatten ur den höga tanken måste det rinna in vatten från den vänstra, och för att det ska göra det måste det vara högre nivå (vilket ger högre tryck vid botten av tanken) i den vänstra.

(d) Tillståndsåterkopplingen

$$u(t) = -Lx(t) + l_0 r(t)$$

ger den karakteristiska ekvationen (se boken avsnitt 9.1)

$$det(sI - (A - BL)) = s^2 + (l_1 + 3)s + 2l_1 + l_2 + 1 = 0$$

Med önskad polplacering i -2 fås den önskade karakteristiska ekvationen

$$(s + 2)^2 = s^2 + 4s + 4 = 0$$

En jämförelse mellan ekvationerna ger

$$l_1 = 1 \quad l_2 = 1$$

Detta ger återkopplingen

$$u(t) = -x_1(t) - x_2(t) + r(t)$$

4. (a) Det stationära reglerfelet när $r(t)$ är ett enhetssteg ges (se boken avsnitt 3.6) av

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1+KG(0)} = \frac{1}{1+K2}$$

(b) Fasmarginal 55° innebär $\arg G(i\bar{\omega}_c) = -125°$ vid den önskade skärfrekvensen $\bar{\omega}_c$. Detta inträffar vid ca 6 rad/s. Vid denna frekvens är $\mid G(i\bar{\omega}_c) \mid \approx 1.1$, vilket innebär att K kan väljas som $K = 1/1.1 \approx 0.9$.

(c) Med lag-kompenseringen fås

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{\gamma}{\gamma + 2K}.$$

För att uppnå $e_0 = 0$ måste vi välja $\gamma = 0$. Lag-länken sänker fasmarginalen ca $-6°$ vilket innebär att högsta möjliga skärfrekvens är vid den frekvens där $\arg G(i\omega) = -180° + 55° + 6° = -119°$. Detta inträffar för $\omega \approx 5.5$ och detta blir därmed ny önskad skärfrekvens, d v s $\bar{\omega}_c = 5.5$ rad/s. Välj därefter

$$\tau_I = 10/\bar{\omega}_c \approx 1.82$$

enligt tumregeln för att fasminskningen ska bli $< 6°$.

K bestäms så att denna önskade skärfrekvens uppnås

$$\mid G_O(i\bar{\omega}_c) \mid = 1$$

Eftersom $\mid F_{lag}(i\bar{\omega}_c) \mid \approx 1$, vid den önskade skärfrekensen ger detta

$$K \mid G(i\bar{\omega}_c) \mid = 1$$

Med avläsningen $|G(\bar{\omega}_c)| \approx 1.2$ får vi $K = 0.83$. Sammantaget ger det regulatorn

$$F(s) = 0.83 \cdot \frac{1.82s + 1}{1.82s}.$$

(d) En ytterligare tidsfördröjning på ΔT sekunder ger en negativ fasförskjutning på $-\omega\Delta T$ radianer. För att det återkopplade systemet fortfarande ska vara stabilt måste fasmarginalen vara större än noll, och eftersom skärfrekvensen är 5.5 rad/s att villkoret

$$5.5 \cdot \Delta T < 55\frac{\pi}{180}$$

vilket ger

$$\Delta T < 0.17$$

Svar: Den ytterligare tidsfördröjningen får vara högst 0.17 sekunder.

5. (a) Det återkopplade systemets överföringsfunktion ges av

$$G_C(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

där $G(s)$ och $F(s)$ enligt uppgiften medför att

$$G_C(s) = \frac{K}{s + K}$$

För G_C ges bandbredden av $\omega_B = K$ eftersom $G_0(0) = 1$ och

$$\mid G_C(i\omega_B) \mid = \frac{K}{\sqrt{K^2 + K^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Svar: $\omega_B = K$

(b) Överföringsfunktionen från referenssignal till styrsignal ges med de givna överföringsfunktionerna av

$$G_u(s) = \frac{K(s + 1)}{K + s}$$

vilket medför att förstärkningen av en sinusformad referenssignal bestäms av

$$\mid G_u(i\omega) \mid = \frac{K\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{K^2 + \omega^2}}$$

Kravet att

$$\mid G_u(i\omega) \mid < 1$$

leder till kravet $K < 1$.

(c)

$$G_{ud}(s) = \frac{sF(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{sK(s + 1)}{K + s} = \frac{s(s + 1)}{1 + \frac{s}{K}}$$

vilket ger

$$\mid G_{ud}(i\omega) \mid = \frac{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{1 + (\omega/K)^2}}$$

Förstärkningskurvan $\mid G_{ud}(i\omega) \mid$ som funktion av ω kommer att växa som ω för små ω. Beroende på om K är större eller mindre än ett kommer kurvan att därefter se något olika ut, men den kommer att växa monotont som funktion av ω. Detta innebär att den inom det aktuella intervallet, d v s $0 \leq \omega \leq 10$ kommer att vara störst vid $\omega = 10$. Detta ger kravet

$$\frac{10\sqrt{10^2 + 1}}{\sqrt{1 + (10/K)^2}} < 1$$

vilket ger

$$K^2 < \frac{100}{100 \cdot 101 - 1}$$

villket ger

$$K < 0.1$$

Vi utgår även från att vi alltid väljer ett icke-negativt K varför kravet blir

$$0 \leq K < 0.1$$