TENTAMEN I TSRT03, TSRT19, TSRT22
REGLERTEKNIK

SAL: TER1,TERE

TID: 2018-08-24 kl. 8:00-13:00

KURS: TSRT03, TSRT19, TSRT22 Reglerteknik

PROVKOD: TEN1

INSTITUTION: ISY

ANTAL UPPGIFTER: 5

ANSVARIG LÄRARE: Svante Gunnarsson, tel. 013-281747,070-3994847

BESÖKER SALEN: cirka kl. 8:30, 10:00 och 11:00

KURSADMINISTRATÖR: Ninna Stensgård, 013-282225,
ninna.stensgard@liu.se

TILLÅTNA HJÄLPMEDEL:

1. *T. Glad & L. Ljung*: ”Reglerteknik. Grundläggande teori”
2. Tabeller och formelsamlingar, t.ex.:
   L. Råde & B. Westergren: ”Mathematics handbook”,
   C. Nordling & J. Österman: ”Physics handbook”,
   S. Söderkvist: ”Formler & tabeller”
3. Miniräknare utan färdiga program

Normala inläsningsanteckningar får finnas i böckerna.

LÖSNINGSFÖRSLAG: Finns på kursens websida efter skrivningens slut.

VISNING av tentan äger rum 2018-09-06, kl. 12.30–13.00 i Ljungeln, B-huset, ingång 27, A-korridoren till höger.

PRELIMINÄRA BETYGSGRÄNSER:	betyg 3	23 poäng
	betyg 4	33 poäng
	betyg 5	43 poäng

OBS! Lösningar till samtliga uppgifter ska presenteras så att alla steg (utom triviala beräkningar) kan följas. Bristande motiveringar ger poängavdrag.

Lycka till!

1. (a) I figuren nedan visas stegsvaret för systemet

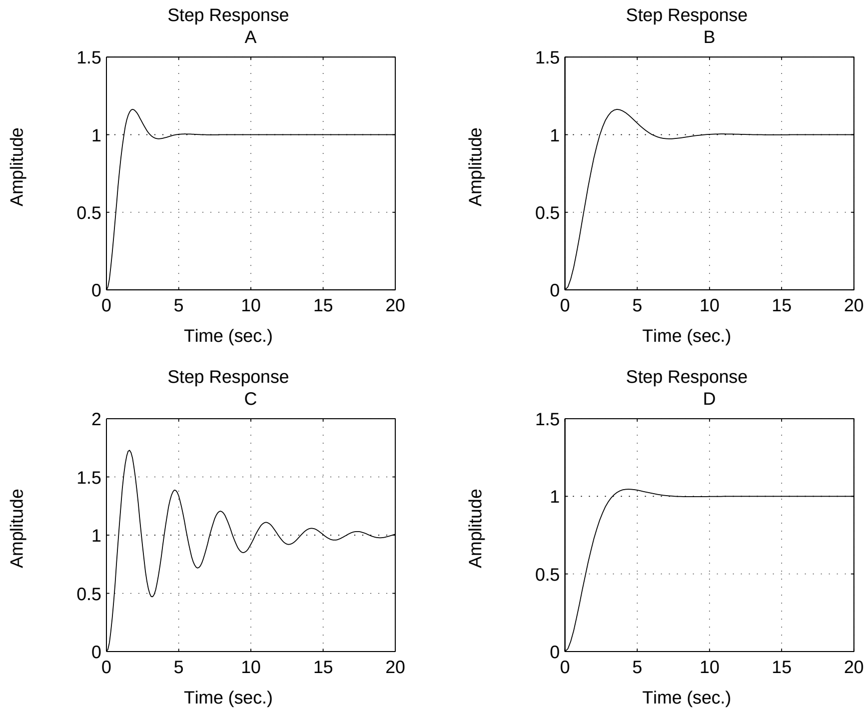
$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

för följande fyra kombinationer av ω_0 och ζ.

$$(i)\ \ \omega_0 = 1\ \ \zeta = 0.7 \quad (ii)\ \ \omega_0 = 2\ \ \zeta = 0.1$$

$$(iii)\ \ \omega_0 = 1\ \ \zeta = 0.5 \quad (iv)\ \ \omega_0 = 2\ \ \zeta = 0.5$$

Kombinera rätt bild med rätt parametervärden. (4p)



Figur 1: Stegsvar till uppgift 1 a.

(b) Temperaturen i ett rum kan approximativt beskrivas med ekvationen

$$\alpha\dot{y}(t) = u(t) - \beta(y(t) - v(t))$$

där $y(t)$ betecknar temperaturen i rummet, $v(t)$ betecknar utetemperaturen och $u(t)$ betecknar den tillförda värmeeffekten. Konstanten $\beta > 0$ representerar den s k värmegenomgångskoefficienten, vilken bl a beror av hur välisolerat rummet är. Konstanten $\alpha > 0$ beror av rummets förmåga att lagra upp värmeenergi. Antag att $y(0) = 0, v(t) = 0$ samt att $u(t)$ är ett enhetssteg. Skissa utseendet hos temperaturen $y(t)$. Ange särskilt temperaturens slutvärde. (3p)

(c) Antag att insignalen till systemet

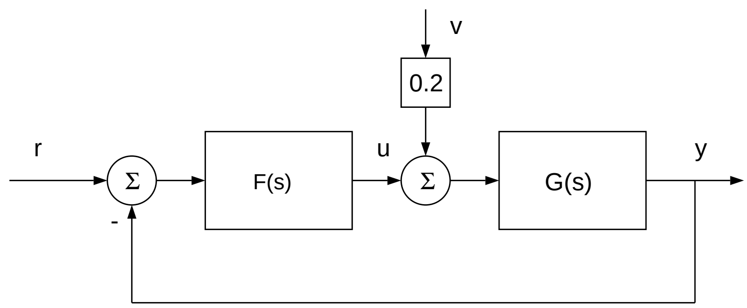
$$Y(s) = \frac{2}{s-4}U(s)$$

ges av $u(t) = 4\sin 3t + 1$. Beskriv utsignalen. (3p)

2. Betrakta åter den modell för rumstemperaturen som studerades i uppgift 1.b och att överföringsfunktionen från u till y i det här fallet ges av

$$G(s) = \frac{1}{10s + 0.2}$$

Antag att temperaturen styrs med återkoppling enligt figuren nedan.



(a) Antag att temperaturen styrs med proportionell återkoppling

$$U(s) = K(R(s) - Y(s))$$

d v s $F(s) = K$. Bestäm överföringsfunktionen från v till reglerfelet e. (3p)

(b) Antag att utetemperaturen varierar sinusformat enligt $v(t) = \sin 0.1t$ och att $r(t) = 0$. Hur ska K väljas för att man ska uppnå att $\mid e(t) \mid \leq 0.1$ i stationärt tillstånd? (3p)

(c) Antag nu att temperaturen styrs med en PI-återkoppling på formen

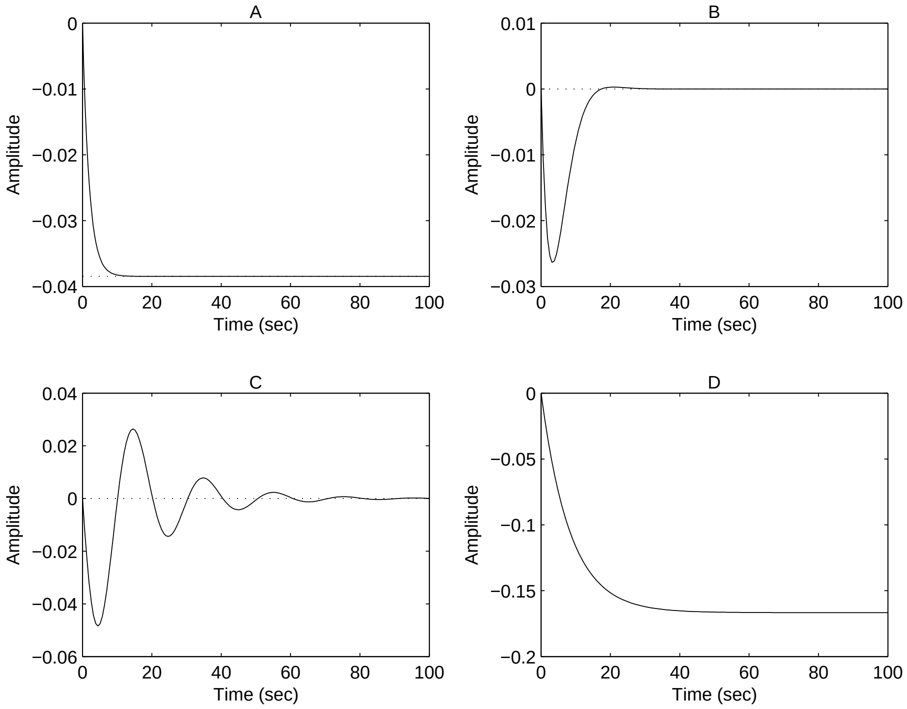
$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

I figurerna nedan visas utsignalen när $v(t)$ är ett enhetssteg, samtidigt som $r(t) = 0$ för fyra kombinationer av koefficienterna K_P och K_I.

$$(i) \quad K_P = 5 \quad K_I = 1 \qquad (ii) \quad K_P = 5 \quad K_I = 0$$

$$(iii) \quad K_P = 1 \quad K_I = 1 \qquad (iv) \quad K_P = 1 \quad K_I = 0$$

Bestäm det återkopplade systemets poler för de olika kombinationerna och kombinera koefficienterna med utsignalerna. (4p)



Figur 2: Figur till uppgift 2c.

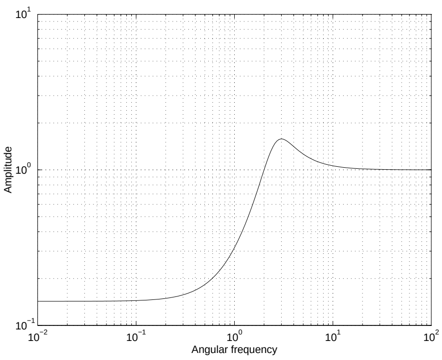
3. (a) Ett system beskrivs av sambandet

$$Y(s) = G(s)U(s) + V(s)$$

där $v(t)$ är en sinusformad störning $v(t) = A \sin \omega t$. Systemet styrs med återkoppling

$$U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$$

där $r(t) \equiv 0$. Absolutbeloppet för den resulterande känslighetsfunktionen ges i figuren nedan. För vilka vinkelfrekvenser hos $v(t)$ gör återkopplingen nytta? För vilken vinkelfrekvens är den sämst? (3p)



Figur 3: Amplitudkurva för känslighetsfunktionen i uppgift 3.a

(b) Betrakta följande system på tillståndsform

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \quad 0)x(t)$$

Går det att finna en tillståndsåterkoppling

$$u(t) = -l_1 x_1(t) - l_2 x_2(t) + r(t)$$

så att det återkopplade systemets poler kan placeras godtyckligt? (3p)

(c) Betrakta åter systemet i uppgiften ovan. Går det att finna en tillståndsåterkoppling

$$u(t) = -l_1 x_1(t) - l_2 x_2(t) + r(t)$$

så att det återkopplade systemet blir stabilt? (4p)

4. I figurerna nedan visas amplitud- och faskurvan för ett system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{10}{s(s+8)(s+2)}$$

(a) Antag att systemet ovan styrs med proportionell återkoppling

$$U(s) = K(R(s) - Y(s))$$

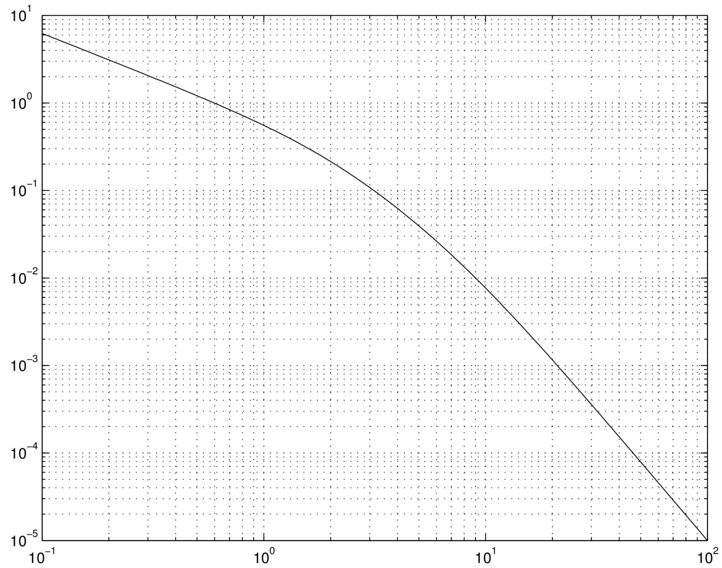
Hur stor kan förstärkningen K som högst väljas om man kräver att reglersystemet skall uppfylla kraven att $\phi_m \geq 30°$ samt $A_m > 2$. (2p)

(b) Hur stort blir det stationära reglerfelet då referenssignalen är ett enhetssteg respektive en enhetsramp då man använder den förstärkning som bestämdes i uppgift a)? (4p)

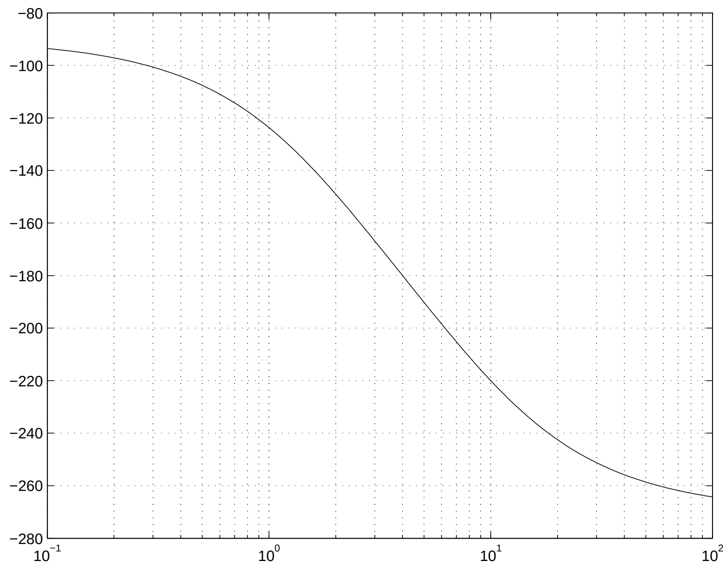
(c) Bestäm en återkoppling på formen

$$U(s) = K\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}(R(s) - Y(s))$$

sådan att de stationära reglerfelen reduceras till 1 % av vad som erhölls i uppgift b) samt att fasmarginalen uppfyller $\phi_m \geq 30°$. (4p)



10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}



−80
−100
−120
−140
−160
−180
−200
−220
−240
−260
−280
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}

5. En roterande maskin kan mycket förenklat beskrivas av modellen

$$J\ddot{y}(t) = u(t)$$

där $y(t)$ och $u(t)$ betecknar vinkelläge respektive applicerat moment, samt J betecknar den roterande massans tröghetsmoment.

(a) Antag att $J = 1$ och att man inför tillståndsvariablerna $x_1(t) = y(t)$ och $x_2(t) = \dot{y}(t)$. Verifiera att modellen kan skrivas på tillståndsform enligt nedan. (1p)

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \qquad y(t) = (1 \;\; 0)x(t)$$

(b) Antag man vill skatta systemets tillståndsvariabler med en observatör på formen

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t))$$

Bestäm K så att observatörens poler placeras i $-\alpha$. Gör en enkel skiss av elementen i K som funktion av α. (4p)

(c) Antag att mätsignalen innehåller en sinusformad mätstörning sådan att

$$y(t) = x_1(t) + n(t)$$

där $n(t)$ har vinkelfrekvensen 2 rad/s. Bestäm överföringsfunktionen från $n(t)$ till skattningen $\hat{x}_2(t)$ av rotationshastigheten hos maskinen, d v s $\dot{y}(t)$. Hur stort kan α maximalt väljas utan att förstärkningen från $n(t)$ till skattningen av $\dot{y}(t)$ överskrider ett? (5p)

Lösningsförslag till tentamen i TSRT03, TSRT19, TSRT22, Reglerteknik

Tentamensdatum: 2018-08-24

Svante Gunnarsson

1. (a) Relativa dämpningen ζ påverkar systemets dämpning, där ett litet värde ger stor översläng hos stegsvaret. ω_0 påverkar systemets snabbhet så att en fördubbling av ω_0 ger en halvering av stigtiden (för fixt ζ). Se ev s. 35-36 i boken för ett exempel.

   Alternativ (iii) och (iv) har samma ζ men olika ω_0, vilket gör att motsvarande stegsvar ska ha lika stor översläng, men (iv) ska vara dubbelt så snabbt som (iii). Detta ger oss **A - iv** och **B - iii**.

   Alternativ (i) och (ii) skiljer sig åt både vad gäller ζ och ω_0, men eftersom vi bara har två figurer kvar räcker det att jämföra ζ. (i) har $\zeta = 0.7$ som ger ett bättre dämpat stegsvar med liten översläng. (ii) har $\zeta = 0.1$, dvs dåligt dämpat som därför ger stor översläng hos stegsvaret. Detta ger oss **C - ii** och **D - i**.

   Svar: A - iv, B - iii, C - ii, D - i.

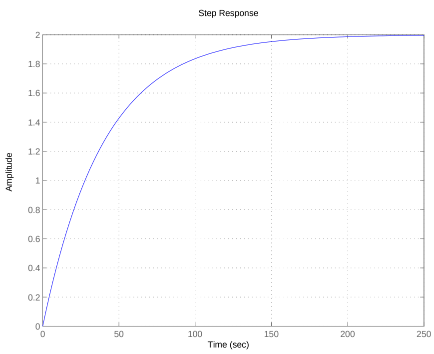
   (b) Laplacetransformering av diffekvationen (med antagandet att $y(0) = 0$) ger

$$\alpha s Y(s) = U(s) - \beta(Y(s) - V(t) \iff Y(s) = \frac{1}{\alpha s + \beta} U(s) + \frac{\beta}{\alpha s + \beta} V(s).$$

   Med $v(t) \equiv 0$ och $u(t)$ ett enhetssteg fås

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(\alpha s + \beta)s} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{\beta(1 + \frac{\alpha}{\beta} s)s} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{\beta(1 + Ts)s} = \frac{1}{\beta}(1 - e^{t/T}) \to \frac{1}{\beta}, t \to \infty \text{ givet } \beta > 0.$$

   Inverstransformen hittas t ex via formelblad eller enklast genom att känner igen överföringsfunktionen i standardform $\frac{K}{sT+1}$ och lösningen till dess stegsvar. I figuren visas svaret för ett val av α och β (vars kvot ger en viss tidskonstant).



Figur 1: Figur för uppgift 1.b

   (c) Systemets pol ligger i höger halvplan, d v s systemet är instabilt. Det betyder att utsignalen går mot oändligheten när t växer.

2. (a) Från figuren i uppgiften fås

$$E(s) = -G(s)F(s)E(s) + R(s) - 0.2G(s)V(s)$$

vilket ger

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)}R(s) - \frac{0.2G(s)}{1+G(s)F(s)}V(s) = \frac{1}{1+G(s)K}R(s) - \frac{0.2G(s)}{1+G(s)K}V(s)$$

Det efterfrågade sambandet är alltså

$$E(s) = -0.2G(s)/(1+G(s)K)V(s)$$

(b) Eftersom störsignalen är sinusforman och systemet är linjärt fås att även reglerfelet blir sinusformat. Förstärkningen från störsignal till reglerfel ges därmed av

$$\mid 0.2G(0.1i)/(1+G(0.1i)K) \mid$$

Kravet i uppgiften innebär därmed att man ska välja K så att

$$\mid 0.2G(0.1i)/(1+G(0.1i)K) \mid \leq 0.1$$

Med de givna värdena fås kravet

$$K \geq \sqrt{3} - 0.2 \approx 1.53$$

(c) Med enbart proportionell återkoppling ges det återkopplade systemets karakteristiska ekvation av

$$10s + 0.2 + K_p = 0$$

vilket ger att systemet har en pol i

$$s = -\frac{(0.2+K_p)}{10}$$

vilket ger -0.52 för $K_p = 5$ samt -0.12 för $K_p = 1$.
Med PI-återkoppling ges det återkopplade systemets karakteristiska ekvation av

$$s^2 + \frac{(0.2+K_p)}{10}s + \frac{K_I}{10} = 0$$

vilket ger $-0.26 \pm i \cdot 0.18$ för $K_p = 5, K_I = 1$ samt $-0.06 \pm i \cdot 0.32$ för $K_p = 1, K_I = 1$.
Stegsvar A och D har stationära fel, alltså saknas integratorverkan, de måste därför paras med (ii) och (iv). Felet minskar snabbare med växande K_P, d v s systemets pol ligger längre till vänster i talplanet, så A – (ii), D – (iv).
För de två kvarvarande ger större K_P ett snabbare system som är mindre svängigt, jämför polernas placering, så B – (i), C – (iii).

3. (a)
   - Återkopplingen gör nytta, i betydelsen att dämpa inverkan av störningen $v(t)$, för de vinkelfrekvenser där känslighetsfunktionens absolutbelopp är mindre än ett.
   - Känslighetsfunktionens absolutbelopp är mindre än ett för $\omega < 2$ rad/s.
   - Känslighetsfunktionens absolutbelopp är som störst omkring $\omega = 3$ rad/s, d v s där fungerar återkopplingen som sämst.

   (b) Polerna kan placeras godtyckligt om systemet är styrbart. Systemet är styrbart om determinanten av styrbarhetsmatrisen, S, är skild från noll (Resultat 8.5 i boken).I detta fall fås

$$S = (B\ AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   vilket ger att det $S = 0$, d v s det återkopplade systemets poler kan ej placeras godtyckligt.

   (c) Med en tillståndsåterkopplingen

$$u(t) = -Lx(t)$$

   där

$$L = (l_1\ l_2)$$

   ges det återkopplade systemets poler av

$$A - BL = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - l_1 & 3 - l_2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

   Det återkopplade systemet kommer därför att ha den karakteristiska ekvationen

$$(s - 1 + l_1)(s + 4) = 0$$

   Följaktligen kan vi placera polerna så att en pol hamnar i -4 och den andra godtyckligt. Då den fasta polen ej ger upphov till instabilitet kan man alltså välja L så att det återkopplade systemet blir stabilt (alla poler i VHP).

4. (a) Vid proportionell reglering påverkar förstärkningen K endast amplitudkurvan hos $G_O(s)$ och inte faskurvan. Kravet på fasmarginalen $\phi_m \geq 30^o$ ger att vi ska söka den vinkelfrekvens där $\arg G_O(i\omega) = -150°$, vilket inträffar vid $w = 2$ rad/s. För att uppnå denna skärfrekvens ska man välja K så att

$$K \cdot \mid G(i \cdot 2) \mid = 1$$

vilket ger $K = \frac{1}{0.2} = 5$.

Faskurvan $\arg G_O(i\omega)$ passerar $-180°$ vid $\omega = 4$ oberoende av K. Med krav på $A_m = 2$ ska man välja K så att

$$K \mid G(i \cdot 4) \mid = 0.5$$

vilket ger $K = 8.3$. Sammantaget ger detta att K kan väljas som högst till $K = 5$.

(b) Med valet $K = 5$ fås följande resultat för reglerfelet i de två fallen, Enligt läroboken ges det stationära reglerfelet då referenssignalen är ett enhetssteg (Systemet är stabilt så vi kan använda slutvärdesteoreme) av

$$e_0 = \frac{1}{1 + F(0)G(0)}$$

och eftersom $G(s)$ innehåller en integration, d v s ett s i nämnaren, kommer stationära felet att bli noll, dvs $e_0 = 0$.

När referenssignalen är en enhetsramp fås på motsvarande sätt

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

Med

$$E(s) = \frac{1}{1 + FG} \frac{1}{s^2}$$

blir stationära felet $e_1 = \frac{8 \cdot 2}{10K} = \frac{8}{25} = 0.32$

(c) Krav

- $e_0 = 0$
- $e_1 = 0.01 \frac{8}{25}$
- $\phi_m \geq 30^o$

Då lag-länken försämrar fasmarginalen med 6^o väljer vi K så att fasmarginalen utan lag-länk blir 36^o. Detta ger $K = \frac{1}{0.3} = 3.3$ ($w_c \approx 1.6$). Enligt tumregeln väljer vi $\tau_I = 10/1.6 \approx 6.25$.

Det stationära reglerfelet när referenssignalen är en enhetsramp och man använder lag-länken i uppgiften blir

$$e_1 = \frac{\gamma \cdot 16}{K \cdot 10}$$

och kravet att felet skall minskas till 0.01 av vad som erhölls med proportionell återkoppling ger kravet

$$\frac{\gamma \cdot 16}{K \cdot 10} < 0.01 \cdot 0.32$$

vilket ger $\gamma < 0.0066$. Detta ger

$$F(s) = 3.3 \frac{6.25s + 1}{6.25s + 0.0067}$$

5. (a) Med $J = 1$ fås ekvationen

$$\ddot{y}(t) = u(t)$$

Med de föreslagna tillståndsvariablerna fås

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

samt

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = u(t)$$

Genom att införa tillståndsvektorn

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

kan tillståndsmodellen skrivas som i uppgiften.

(b) Skattningsfelet är $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ och dess dynamik ges av $\dot{e}(t) = (A - KC)e(t)$. Polpolynomet som definierar polerna ges

$$\det\big(Is - (A - KC)\big) = \det\left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right) = \det\begin{pmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s \end{pmatrix} = s^2 + k_1 s + k_2$$

Önskat polpolynom är $(s + \alpha) = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2$. Vi får således $k_1 = 2\alpha$ och $k_2 = \alpha^2$.

(c) Effektivt så frågas det efter överföringsfunktionen från $n(t)$ till skattningen av $\dot{y}(t)$, och amplitudförstärkningen för denna överföringsfunktion i frekvensen 2. Vi har $\dot{y}(t) = x_2(t)$, och vi är således intresserade av överföringsfunktionen från $n(t)$ till $\hat{x}_2(t)$. Observatören definieras av

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(x_1(t) + n(t) - C\hat{x}) \\ &= (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Kx_1(t) + Kn(t) \end{aligned}$$

Överföringsfunktionen från $n(t)$ till $\hat{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{x}(t)$ ges enligt standard formel (med andra systemmatriser) av

$$\begin{aligned} H(s) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \big(Is - (A - KC)\big)^{-1} K \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \frac{sk_2}{s^2 + k_1 s + k_2} \\ &= \frac{s\alpha^2}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2} = \frac{s\alpha^2}{(s + \alpha)^2} \end{aligned}$$

Vi ser omedelbart att förstärkningen går mot noll både för låga och höga frekvenser. Det kommer dock finnas ett band av frekvenser där förstärkningen blir icke försumbar. I frekvensen 2 får vi kravet

$$\left| \frac{\alpha^2 \cdot 2i}{(2i + \alpha)^2} \right| < 1$$

dvs

$$\frac{2\alpha^2}{\sqrt{2^2 + \alpha^2}\sqrt{2^2 + \alpha^2}} < 1$$

vilket ger $\alpha^2 < 2^2$ och således $\alpha < 2$. **Svar:** Övre gräns ges av $\alpha < 2$. Dvs, observatören kan inte göras godtyckligt snabb, om man vill undvika att förstärka mätstörningar med frekvens 2 rad/s.