TENTAMEN I TSRT22 REGLERTEKNIK

SAL:

TID: 2018-01-04 kl. 8:00-13:00

KURS: TSRT22 Reglerteknik

PROVKOD: TEN1

INSTITUTION: ISY

ANTAL UPPGIFTER: 5

ANSVARIG LÄRARE: Svante Gunnarsson, tel. 013-281747,070-3994847

BESÖKER SALEN: cirka kl. 9:00, 10:30 och 12:00

KURSADMINISTRATÖR: Ninna Stensgård, 013-282225, ninna.stensgard@liu.se

TILLÅTNA HJÄLPMEDEL:

1. *T. Glad & L. Ljung*: ”Reglerteknik. Grundläggande teori”
2. Tabeller och formelsamlingar, t.ex.:
   L. Råde & B. Westergren: ”Mathematics handbook”,
   C. Nordling & J. Österman: ”Physics handbook”,
   S. Söderkvist: ”Formler & tabeller”
3. Miniräknare utan färdiga program

Normala inläsningsanteckningar får finnas i böckerna.

LÖSNINGSFÖRSLAG: Finns på kursens websida efter skrivningens slut.

VISNING av tentan äger rum 2018-01-26, kl. 12.30–13.00 i Ljungeln, B-huset, ingång 27, A-korridoren till höger.

PRELIMINÄRA BETYGSGRÄNSER:	betyg 3	23 poäng
	betyg 4	33 poäng
	betyg 5	43 poäng

OBS! Lösningar till samtliga uppgifter ska presenteras så att alla steg (utom triviala beräkningar) kan följas. Bristande motiveringar ger poängavdrag.

Lycka till!

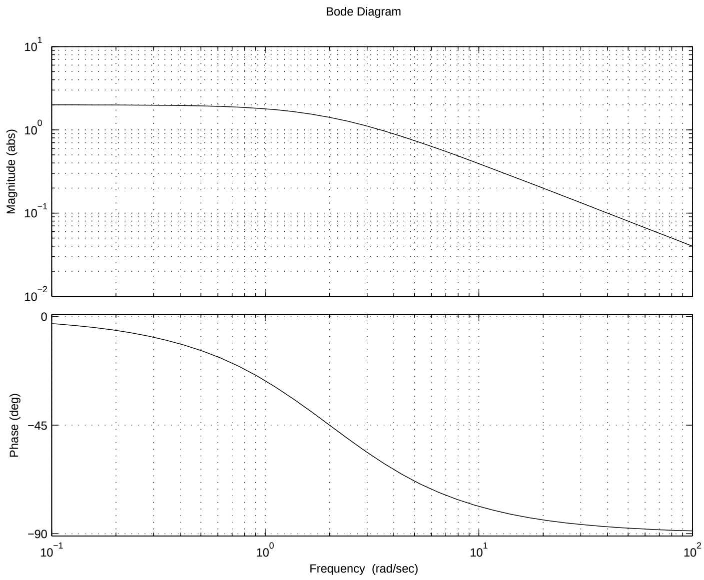
1. (a) Ett system beskrivs av sambandet

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

och har Bodediagrammet som visas i figur 1. Antag att insignalen till systemet ges av

$$u(t) = \sin 5t$$

Vad blir utsignalen efter att den transienta delen av utsignalen dött ut? Hur mycket, uttryckt i sekunder, kommer utsignalen att vara förskjuten relativt insignalen? (3p)



Figur 1: Bodediagram till uppgift 1.a.

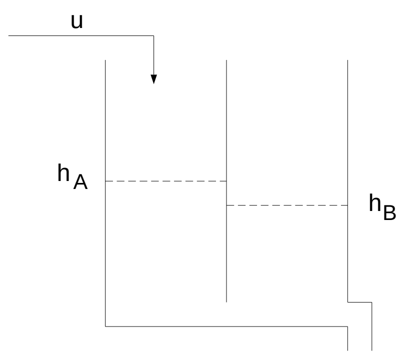
(b) Ett system består av två sammankopplade vattentankar enligt figur 2. Nivåerna i tankarna betecknas $h_A(t)$ respektive $h_B(t)$ och kan approximativt beskrivas av ekvationerna

$$\dot{h}_A(t) = -\alpha(h_A(t) - h_B(t)) + u(t)$$

och

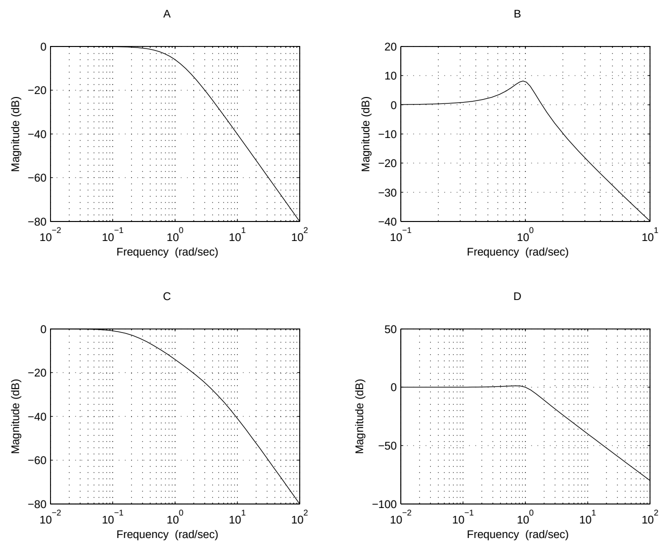
$$\dot{h}_B(t) = \alpha(h_A(t) - h_B(t)) - \beta h_B(t)$$

där konstanterna α och β beror av egenskapena hos förbindelsen mellan tankarna samt utloppet, och $u(t)$ betecknar insignalen. Ange överföringsfunktionen från insignalen $u(t)$ till nivån i tank A, d v s $h_A(t)$. Antag $\alpha = \beta = 1$. (3p)

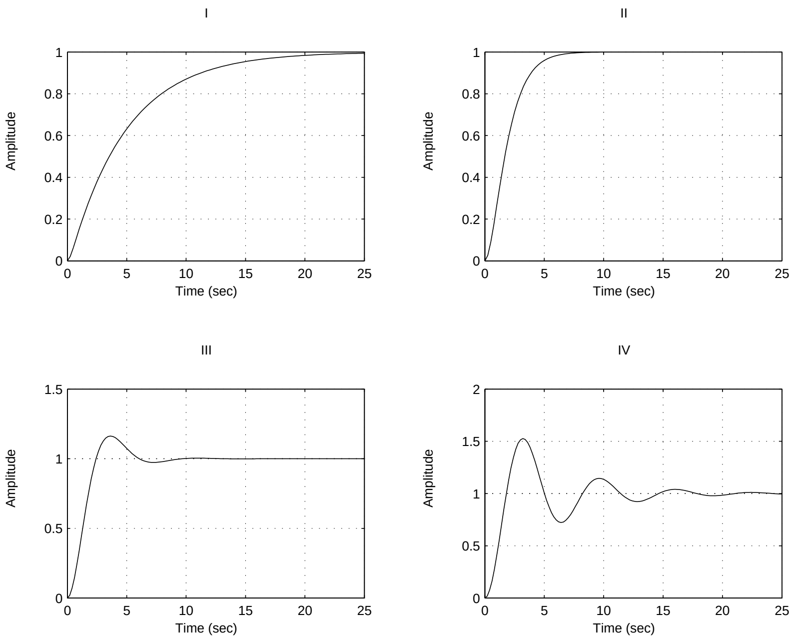


Figur 2: Figur till uppgift 1.b.

(c) I figurerna 3 och 4 visas stegsvar respektive Bodediagram för fyra system. Kombinera stegsvaren och Bodediagrammen. (4p)



Figur 3: Bodediagram till uppgift 1.c.



Figur 4: Stegsvar till uppgift 1.c.

2. (a) Vilka tre faktorer är det i praktiken som förhindrar att man kan skapa återkopplade reglersystem med godtyckligt bra prestanda, med avseende på utsignalens förmåga att följa referenssignaler och reducera inverkan av systemstörningar? (3p)

(b) Figuren nedan visar stegsvaret då systemet

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

där

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

styrs med PID-återkopplingen

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau + K_D \dot{e}(t)$$

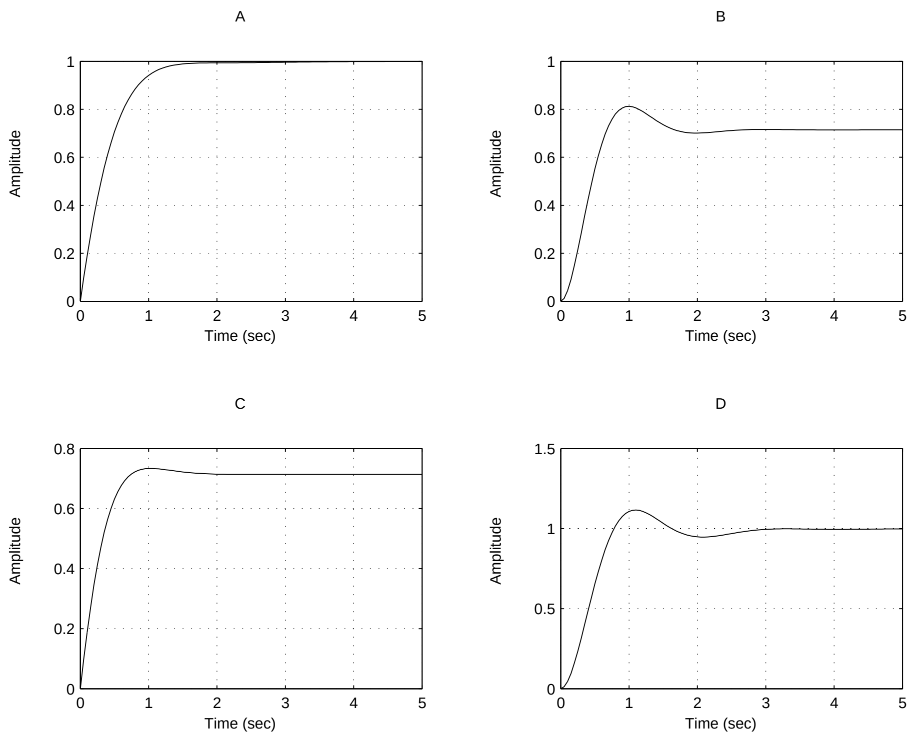
för några olika värden på K_P, K_I respektive K_D. Koefficientvärdena är

(i) $K_P = 10$ $K_I = 0$ $K_D = 2$ (ii) $K_P = 10$ $K_I = 0$ $K_D = 0$

(iii) $K_P = 10$ $K_I = 10$ $K_D = 0$ (iv) $K_P = 10$ $K_I = 10$ $K_D = 2$

Kombinera koefficientvärdena med figurerna.

(4p)



Figur 5: Stegsvar till uppgift 2b.

(c) Antag åter att systemet

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

där

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

styrs med med PID-återkopplingen

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau + K_D \dot{e}(t)$$

Ange den karakteristiska ekvationen för det återkopplade systemet. Kan man, med hjälp av lämplig val av koefficienterna K_P, K_I, K_D placera det återkopplade systemets poler godtyckligt? (3p)

3. En föremål med massan $m = 1$ rör sig friktionsfritt under påverkan av en kraft $u(t)$ och kan beskrivas med differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) = u(t)$$

där $y(t)$ är föremålets position.

(a) Inför tillståndsvariablerna $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$ och ställ upp systemet på tillståndsform. (1p)

(b) Bestäm en tillståndsåterkoppling

$$u(t) = -Lx(t) + l_0 r(t)$$

sådan att det återkopplade systemets poler får absolutbelopp ω_0 och relativ dämpning ζ. För 2 poäng kan fallet $\omega_0 = 2$ och $\zeta = 1$ behandlas. (5p)

(c) Antag att l_0 väljs så det återkopplade systemet får statisk förstärkning ett. Verifiera att detta medför $l_0 = l_1$ oavsett var det återkopplade systemets poler placeras. Varför är detta ett naturligt resultat? (4p)

4. I artikeln [1] nedan studeras problemet att reglera rotationshastigheten hos ett vindkraftverk när vindens hastighet varierar. Enligt [1] kan sambandet mellan insignalen till den mekanism som ändrar rotorbladens vinkel och rotationshastigheten förenklat beskrivas med modellen

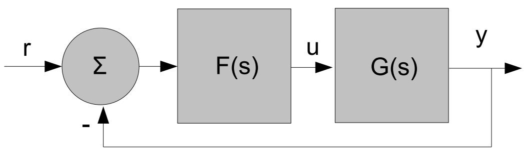
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

där

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

där $\tau = 5, K = 7, \zeta = 0.05$ och $\omega_n = 20$. Bodediagrammet för modellen visas i figur 8.

(a) Antag att systemet skall styras med återkoppling enligt figur 6.



Figur 6: Reglersystem

Bestäm en regulator $F(s)$ sådan att följande specifikationer uppfylls:

- Det stationära reglerfelet skall vara noll då referenssignalen är ett steg.
- $\omega_c = 0.4$ rad/s
- $\phi_m \geq 60°$

(6p)

(b) Anta att systemet styrs med den återkoppling som bestämdes i uppgift a) ovan. Ange $| S(i\omega) |$ för vinkelfrekvenserna $\omega = 0$ rad/s och $\omega = 20$ rad/s. (4p)

[1] L.Y. Pao och K.E. Johnson, "A Tutorial on the Dynamics and Control of Wind Turbines and Wind Farms". Proceedings of the American Control Conference, 2009.

5. Ett systemet beskrivs av sambandet

$$Y(s) = G(s)U(s) + V(s)$$

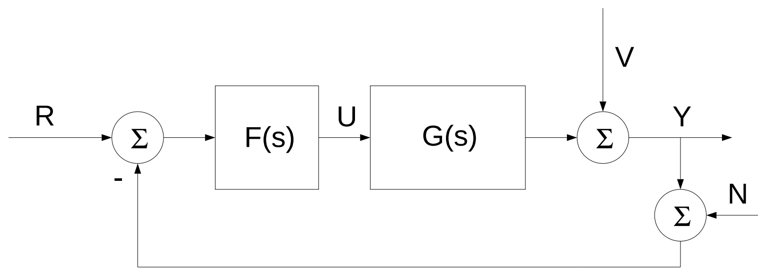
där

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

och V är en systemstörning. Systemet styrs med återkopplingen

$$U(s) = F(s)(R(s) - (Y(s) + N(s)))$$

enligt figuren nedan, där $F(s) = K$, $K > 0$, och $N(s)$ betecknar en mätstörning.

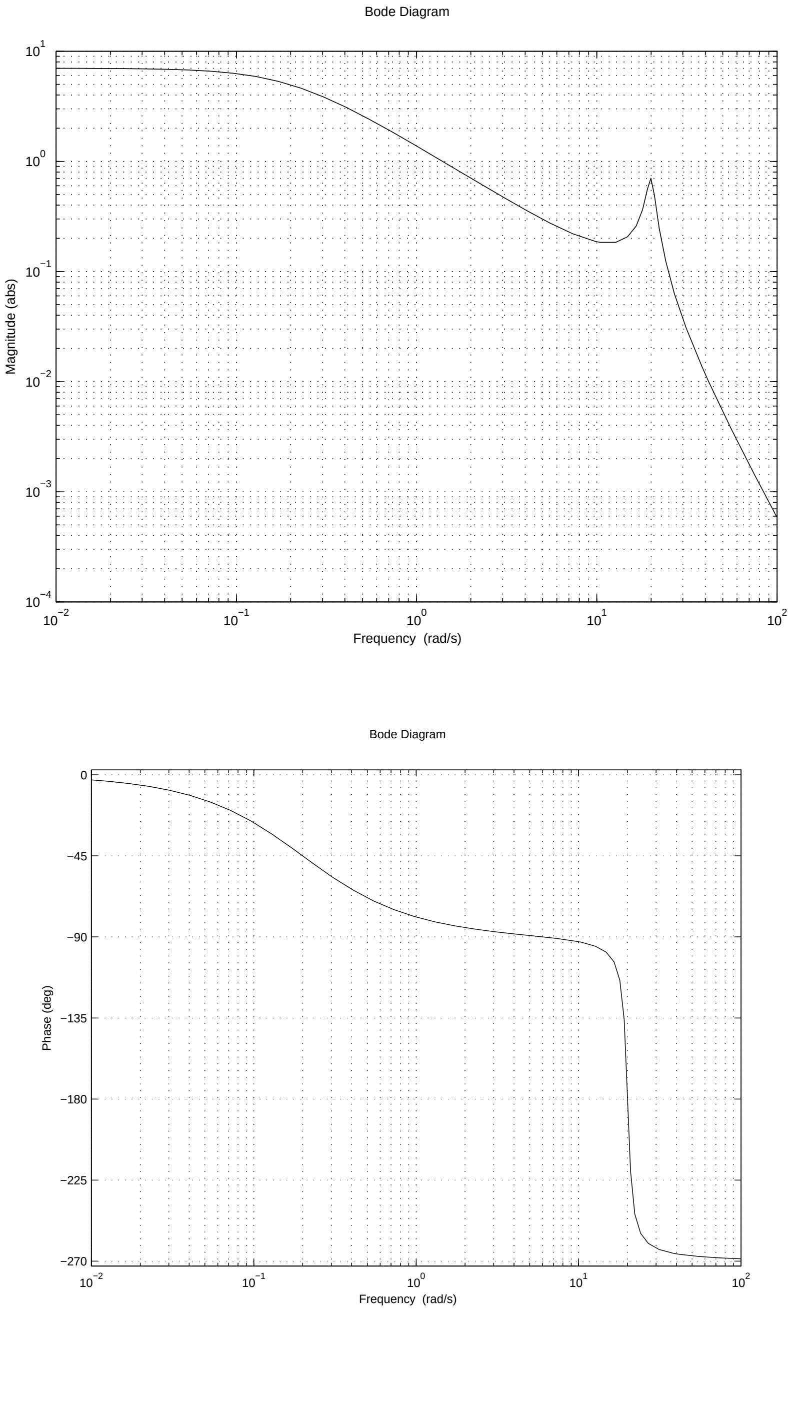


Figur 7: Figur till uppgift 5.

(a) Antag att $r(t) = 0$. Bestäm sambandet mellan utsignalen Y, systemstörningen V och mätstörningen N. (2p)

(b) Bestäm känslighetsfunktionen $S(s)$ och dess absolutbelopp $\mid S(i\omega) \mid$. Verifiera att återkopplingen alltid gör nytta i den meningen att känslighetsfunktionens absolutbelopp är mindre än ett för alla ω. Antag att systemet påverkas av en systemstörning på formen $v(t) = \sin t$. Hur måste K väljas för att förstärkningen från $v(t)$ till $y(t)$ ska vara mindre än 0.1? (4p)

(c) Bestäm den komplementära känslighetsfunktionen $T(s)$ och dess absolutbelopp $\mid T(i\omega) \mid$. Antag att man använder ett K som klarar kravet i uppgift b, samt att systemet även påverkas av en mätstörning $n(t) = \sin \omega_n t$. Vilket krav måste gälla för ω_n för att förstärkningen från $n(t)$ till $y(t)$ ska vara mindre än 0.1. (4p)



Figur 8: Bodediagram för system i uppgift 4

Lösningsförslag till tentamen i TSRT22, TSRT19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2018-01-04
Svante Gunnarsson

1. (a) Efter att den transienta delen av utsignalen (den homogena delen av differentialekvationens lösning) gått mot noll ges den stationära utsignalen (partikulärlösningen) enlig "sinus in-sinus ut" som

$$y(t) = |G(5i)| \sin\big(5t + \arg G(5i)\big)$$

Enligt figuren har vi $|G(5i)| = 7 \cdot 10^{-1} = 0.7$ och $\arg G(5i) \approx -70^\circ = -70^\circ \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \approx -1.2217\,\text{rad}$. Detta ger utsignalen $y(t) = 0.7\sin(5t - 1.2217)$. Utsignalen blir förskjuten $\frac{\arg G(5i)}{5} \approx -0.2443\,\text{s}$, dvs ligger $-0.2443\,\text{s}$ efter insignalen. (3 p)

(b) $\alpha = \beta = 1$ ger

$$\dot{h}_A(t) = -h_A(t) + h_B(t) + u(t)$$
$$\dot{h}_B(t) = h_A(t) - 2h_B(t)$$

Via Laplacetransform ger detta ekvationerna

$$(s+1)H_A(s) = H_B(s) + U(s)$$

samt

$$H_B(s) = \frac{1}{s+2} H_A(s)$$

Tillsammans ger dessa

$$(s+1)H_A(s) = \frac{1}{s+2} H_A(s) + U(s)$$

Förenklingar ger sedan

$$H_A(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+1} U(s)$$

(c) Bodediagram D har en resonanstopp, dock lägre än bodediagram B, dvs motsvarar ett stegsvar med mindre oscillationer: D – III, B – IV. System A har högre bandbredd, d v s kortare stigtid, än system C, A – II och C – I. (4 p)

2. (a) De tre grundläggande begränsningarna är:
    - Begränsad styrsignal
    - Mätstörningar
    - Modellfel

   (b) (i) och (ii) har $K_I = 0$, d v s saknar I-del. Detta motsvarar stegsvaren B och C. (i) har D-del vilket ger ett bättre dämpat stegsvar, vilket motsvarar C. Detta ger alltså kombinationerna (i) - C och (ii) - B.

   (iii) och (iv) har I-del, med lika stora värden på K_P och K_I. Detta svara mot stegsvaren A och D. I (iv) finns en D-del, vilket ger ett bättre dämpat stegsvar. Detta ger alltså kombinationerna (iii) - D och (iv) - A.

   (c) Vi har återkopplingen

$$U(s) = (K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s)E(s) = \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s} E(s) = F(s)E(s)$$

   Det återkopplade systemets överföringsfunktion ges av

$$G_C(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{K_I + K_P s + K_D s^2}{s^3 + s^2(K_D + 4) + s(K_P + 4) + K_I}$$

   Den karaktäristiska ekvationen ges av

$$s^3 + s^2(K_D + 4) + s(K_P + 4) + K_I = 0$$

   Jämförelse med en godtycklig karaktäristisk ekvation av tredje graden

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

   ger att eftersom koefficienterna framför termerna i det slutna systemets karaktäristiska ekvation endast beror av en parameter K_P, K_I, K_D i taget, så kan polerna till den allmänna ekvationen väljas fritt utifrån lämpliga val av K_P, K_I, K_D.

3. (a)

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

och

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = u$$

ger

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Tillståndsåterkopplingen

$$u = -Lx + l_0 r$$

ger

$$det(sI - (A - BL)) = s^2 + l_2 s + l_1$$

Poler med absolutbelopp ω_0 och relativ dämpning ζ motsvarar ekvationen

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

Jämförelse ger

$$l_1 = \omega_0^2 \qquad l_2 = 2\zeta\omega_0$$

(c) För det återkopplade systemet gäller

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -l_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} l_0 r \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I stationärt tillstånd gäller

$$\dot{x}_1 = x_2 = 0$$

och

$$\dot{x}_1 = -l_1 x_1 - l_2 x_2 + l_0 r = 0$$

vilket ger

$$l_1 y = l_0 r$$

Kravet $y = r$ medför därmed $l_0 = l_1$.

Föremålet rör sig friktionsfritt och påverkas endast av den pålagda krafter, och för att systemet ska kunna vara i vila vid den önskade positionen måste styrsignalen vara noll när systemet befinner sig där. Återkopplingen ges av

$$u = l_0 r - l_1 y - l_2 \dot{y}$$

och för att u ska vara noll när $y = r$ måste $l_0 = l_1$ gälla.

4. Specifikationerna för skärfrekvens och fasmarginal ges av

(a)

$$\begin{aligned}\omega_{c,d} &= 0.4 \quad [\text{rad/s}] \\ \Phi_{m,d} &= 60^\circ \end{aligned} \tag{1}$$

I Bodediagrammet kan man se att avståndet mellan argumentkurvan och $-180°$ vid den önskade skärfrekvensen 0.4 rad/s är ungefär 115°. Detta är gott och väl mer än de nödvändiga 66° (6° extra på grund av att en lag-regulator behövs). Detta innebär att lead-delen i lead-lag-regulatorn kan uteslutas. Den regulator som ska designas får då följande utseende

$$F(s) = K\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma} \tag{2}$$

K väljs så att skärfrekvensen blir den önskade

$$1 = |KG(i\omega_{c,d})| \Leftrightarrow K = \frac{1}{|G(i\omega_{c,d})}| = \frac{1}{|G(i\cdot 0.4)|} \tag{3}$$

Bodediagrammet ger att $|G(i\cdot 0.4)| \approx 3.13$ viket ger att $K \approx \frac{1}{3.13} \approx 0.319$.

τ_I väljs enligt tumregeln

$$\tau_I = \frac{10}{\omega_{c,d}} = \frac{10}{0.4} = 25 \tag{4}$$

γ väljs så att kraven på stationära fel uppfylls. Som krav har vi att det stationära reglerfelet ska vara noll då referensignalen är ett steg. Detta kan uppnås om regulatorn innhåller en integrator, vilket den endast gör om γ sätts till noll. (Alternativt kan man bestämma γ m.h.a slutvärdesteoremet enligt:

$$E(s) = \frac{1}{1+F(s)G(s)}R(s) \tag{5}$$

$$R(s) = \{r(t) = \text{steg med amplituden } r_0\} = \frac{r_0}{s} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+0.319\frac{25s+1}{25s+\gamma}\frac{1}{5s+1}\frac{7\cdot 20^2}{s^2+2\cdot 0.05\cdot 20s+20^2}}\frac{r_0}{s} \\ &= \frac{r_0}{1+0.319\frac{1}{\gamma}\frac{1}{1}\frac{7\cdot 20^2}{20^2}} = \frac{r_0}{1+\frac{2.233}{\gamma}}\end{aligned} \tag{7}$$

För att detta ska vara 0 krävs att $\gamma = 0$ och man får alltså samma värde på γ som med tidigare resonemanget.)

Svar: En regulator som uppfyller kraven är

$$F(s) = 0.319\frac{25s+1}{25s} \tag{8}$$

(b) Känslighetetsfunktionen ges av

$$S(s) = \frac{1}{1+F(s)G(s)}$$

För den regulator $F(s)$ som konstruerades i uppgiften ovan gäller att $F(s) \to \infty$ då $s \to 0$, vilket medför att $S(0) = 0$.
$|S(i\cdot 20)|$ ges av

$$|S(i\cdot 20)| = \left|\frac{1}{1+F(i\cdot 20)G(i\cdot 20)}\right| \tag{9}$$

I Bodediagrammet för $G(i\omega)$ kan man läsa av att $\arg G(i\cdot) = -180°$ vilket innebär att $G(i\omega)$ är ett reellt, negativt tal. Man kan också läsa av att $|G(i\cdot 20)| \approx 0.7$. Allt som allt ger detta att $G(i \cdot 20) = -0.7$.

$F(i \cdot 20)$ kan räknas ut enligt

$$\begin{aligned}
F(i\omega) &= 0.319\frac{25i\omega + 1}{25i\omega} = 0.319(1 + \frac{1}{25i\omega}) = 0.319(1 + \frac{i}{25i\omega \cdot i}) \\
&= 0.319(1 + \frac{i}{-25\omega}) = 0.319(1 - \frac{1}{25\omega}i) \qquad (10) \\
F(i \cdot 20) &= 0.319(1 - \frac{1}{25 \cdot 20}i) = 0.319(1 - \frac{1}{500}i) \qquad (11)
\end{aligned}$$

Sätts detta in i uttrycket (9) för $|S(i \cdot 20)|$ så fås

$$\begin{aligned}
|S(i \cdot 20)| &= \left|\frac{1}{1 + 0.319(1 - \frac{1}{500}i) \cdot (-0.7)}\right| \\
&= \frac{1}{\left|0.7767 + \frac{0.2233}{500}i\right|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{0.7767^2 + (\frac{0.2233}{500})^2}} \qquad (12) \\
&\approx 1.29 \qquad (13)
\end{aligned}$$

Svar: $|S(i0)| = 0, \quad |S(i20)| \approx 1.29$

5. (a) Blockschemaräkning ger

$$Y(s) = \frac{1}{1 + KG(s)}V(s) - \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}N(s)$$

(b) Känslighetsfunktionen definieras som

$$S(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)}$$

vilket för de förutsättningar som gäller här ger

$$S(s) = \frac{s + 1}{s + 1 + K}$$

Detta medför

$$|S(i\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\sqrt{(1 + K)^2 + \omega^2}}$$

För $K > 0$ är nämnaren alltid större än täljaren, vilket medför att $\mid S(i\omega) \mid < 1$ för alla ω. För att förstärkningen från v till y ska vara mindre än 0.1 vid $\omega = 1$ måste

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1 + K)^2 + 1}} < 0.1$$

gälla, vilket ger $K > 13.1$.

(c) Den komplementära känslighetsfunktionen definieras som

$$Q(s) = 1 - S(s)$$

vilket ger

$$Q(s) = \frac{K}{s + 1 + K}$$

och

$$\mid Q(i\omega) \mid = \frac{K}{\sqrt{(1 + K)^2 + \omega^2}}$$

och med K från föregående uppgift gäller det att hitta ω_n sådant att

$$\frac{13.1}{\sqrt{(1 + 13.1)^2 + \omega_n^2}} < 0.1$$

vilket ger $\omega_n > 130$.