TENTAMEN I TSRT22 REGLERTEKNIK

SAL:

TID: 2017-10-23 kl. 8:00-13:00

KURS: TSRT22 Reglerteknik

PROVKOD: TEN1

INSTITUTION: ISY

ANTAL UPPGIFTER: 5

ANSVARIG LÄRARE: Svante Gunnarsson, tel. 013-281747,070-3994847

BESÖKER SALEN: cirka kl. 9:00, 10:30 och 12:00

KURSADMINISTRATÖR: Ninna Stensgård, 013-282225, ninna.stensgard@liu.se

TILLÅTNA HJÄLPMEDEL:

1. *T. Glad & L. Ljung*: "Reglerteknik. Grundläggande teori"
2. Tabeller och formelsamlingar, t.ex.:
   L. Råde & B. Westergren: "Mathematics handbook",
   C. Nordling & J. Österman: "Physics handbook",
   S. Söderkvist: "Formler & tabeller"
3. Miniräknare utan färdiga program

Normala inläsningsanteckningar får finnas i böckerna.

LÖSNINGSFÖRSLAG: Finns på kursens websida efter skrivningens slut.

VISNING av tentan äger rum 2017-11-24, kl. 12.30–13.00 i Ljungeln, B-huset, ingång 27, A-korridoren till höger.

PRELIMINÄRA BETYGSGRÄNSER:	betyg 3	23 poäng
	betyg 4	33 poäng
	betyg 5	43 poäng

OBS! Lösningar till samtliga uppgifter ska presenteras så att alla steg (utom triviala beräkningar) kan följas. Bristande motiveringar ger poängavdrag.

Lycka till!

1. (a) Figur 1 visar polerna respektive stegsvaren för ett system av typen

$$Y(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} U(s)$$

för fyra olika kombinationer på koefficienterna ω_0 och ζ. Kombinera stegsvaren med polernas placering. (4p)

(b) Två f d LiTH-studenter är på semester en solig sommardag på Östersjön i sin nyinköpta 50-fots daycruiser (båt) med siktet inställt på Visby. Över en kopp kaffe på soldäck funderar de över funktionen hos båtens autopilot (vars uppgift är att automatiskt hålla båten på rätt kurs) och vad som är styrsignal $u(t)$, utsignal $y(t)$ och störsignal $v(t)$ i detta reglersystem. Vad är dina egna förslag? (3p)

(c) Ett system beskrivs av modellen

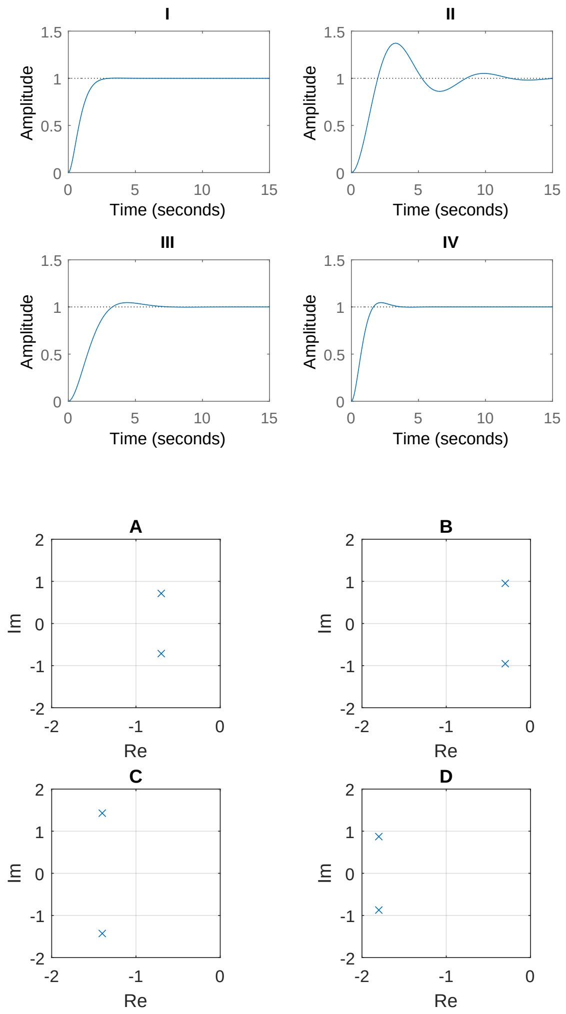
$$Y(s) = \frac{k}{sT + 1} U(s)$$

För att bestämma k och T låter man insignalen vara sinusformad enligt

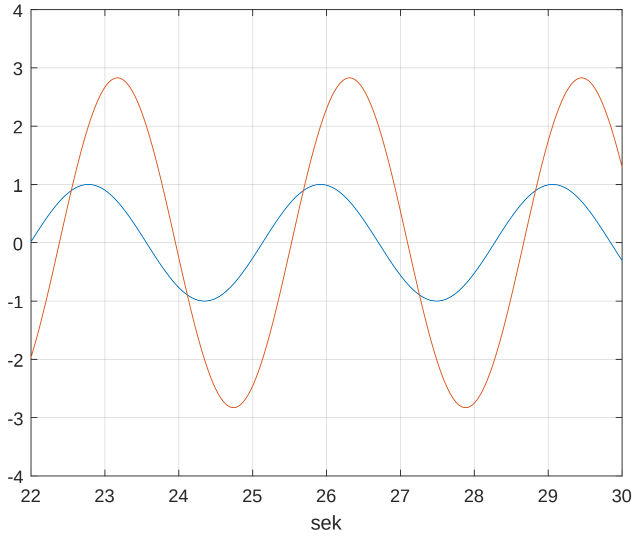
$$u(t) = \sin 2t$$

Insignal och utsignal (efter att den transienta delen av utsignalen dött ut) ges av figur 2. Bestäm T och k. (2p)

(d) Vilken annan typ av insignal skulle göra det enklare att bestämma koefficienterna k och T jämfört med uppgift 1 c. (1p)



Figur 1: Poler och stegsvar till uppgift 1 a.



Figur 2: In- och utsignal till uppgift 1 c.

2. Ett system beskrivs av modellen

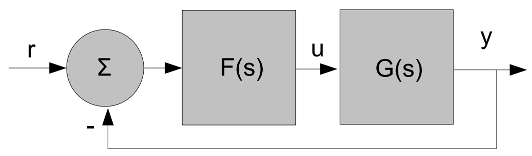
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

där

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Systemet styrs med PID-återkoppling enligt figur 3 där

$$F(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s$$



Figur 3: Reglersystem

(a) I figur 4 visas det återkopplade systemets amplitudkurva, d v s $\mid G_C(i\omega) \mid$ för några olika kombinationer på PID-koefficienter. Kombinera koefficienterna och figurerna.

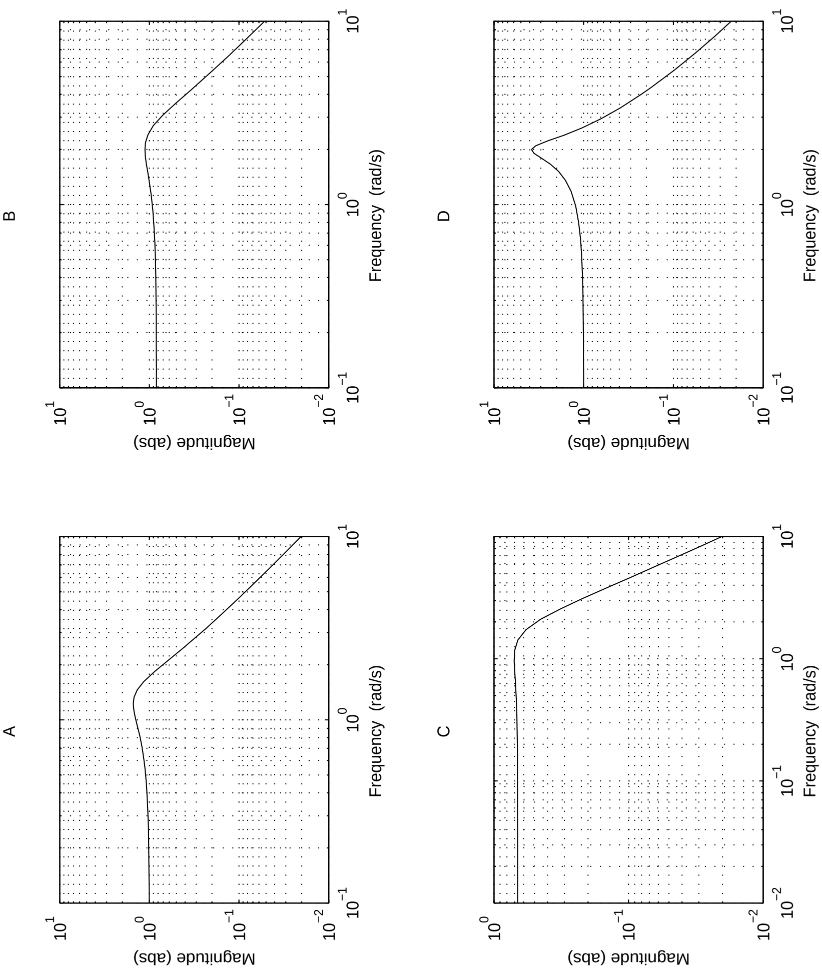
(1) $K_P = 2, K_I = 0, K_D = 0$ (2) $K_P = 5, K_I = 0, K_D = 0$

(3) $K_P = 2, K_I = 2, K_D = 0$ (4) $K_P = 2, K_I = 10, K_D = 0$

(4p)

(b) Betrakta åter modellen och återkopplingen ovan. Ange det återkopplade systemets karakteristiska ekvation. (3p)

(c) Bestäm koefficienterna K_P, K_I och K_P så att det återkopplade systemets poler placeras i -1. Verifiera att den resulterande återkopplingen medför att känslighetsfunktionen uppfyller att $S(0) = 0$. (3p)



Figur 4: Bodediagram till uppgift 2a.

3. Betrakta en enkel modell av en robotarm, där vi antar att roboten arbetar i horisontalplanet, d v s att gravitationen inte har någon inverkan. Robotarmen kan då beskrivas med ekvationen

$$J\ddot{y}(t) = u(t) - f\dot{y}(t)$$

där $y(t)$ och $u(t)$ betecknar armens vinkel respektive pålagt moment. Koefficienterna J och f betecknar tröghetsmoment samt friktionskoefficient.

   (a) Verifiera att systemet med tillståndsvariablerna $x_1(t) = y(t)$ och $x_2(t) = \dot{y}(t)$ kan beskrivas med tillståndsmodellen

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -f/J \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/J \end{pmatrix} u(t) \qquad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

(2p)

   (b) Antag nu (och i deluppgifterna nedan) att $J = 1$ och $f = 0.1$. Ange modellens poler. (2p)

   (c) Beräkna en tillståndsåterkoppling på formen

$$u(t) = -Lx(t) + l_0 r(t)$$

   sådan att det återkopplade systemet poler placeras i $-\alpha$. (4p)

   (d) Antag nu att roboten arbetar i vertikalplanet, vilket medför att även gravitationen påverkar armens rörelse. Detta kan förenklat beskrivas med ekvationen

$$J\ddot{y}(t) = u(t) - f\dot{y}(t) + v(t)$$

   där störingen $v(t)$ representerar gravitationens inverkan. Antag nu att $v(t) = v_0$ och att vi använder återkopplingen ovan i fallet att $r(t) = 0$. Vad blir $y(t)$ i stationärt tillstånd? (2p)

4. Läshuvudet hos en hårddisk styrs via en mekanisk arm, vars rörelse kan modelleras med överföringsfunktionen

$$Y(s) = \frac{5}{(\tau_1 s + 1)} \cdot \frac{0.05}{s(s\tau_2 + 1)} U(s)$$

där $Y(s)$ och $U(s)$ är Laplacetransformerna av armens vinkel respektive inspänningen till den elektriska motor som skapar momentet som vrider armen. Vidare gäller att $\tau_1 = 10^{-3}$ och $\tau_2 = 0.05$. Systemets Bodediagram ges på nästa sida.

(a) Antag inledningsvis att armen styrs med proportionell återkoppling

$$U(s) = K(R(s) - Y(s))$$

Hur stor kan förstärkningen K vara som mest för att det återskopplade systemet ska vara stabilt? (2p)

(b) Antag även nu att armen styrs med proportionell återkoppling. Ange felkoefficienterna e_0 respektive e_1. För vilka K är felkoefficienterna definierade? (4p)

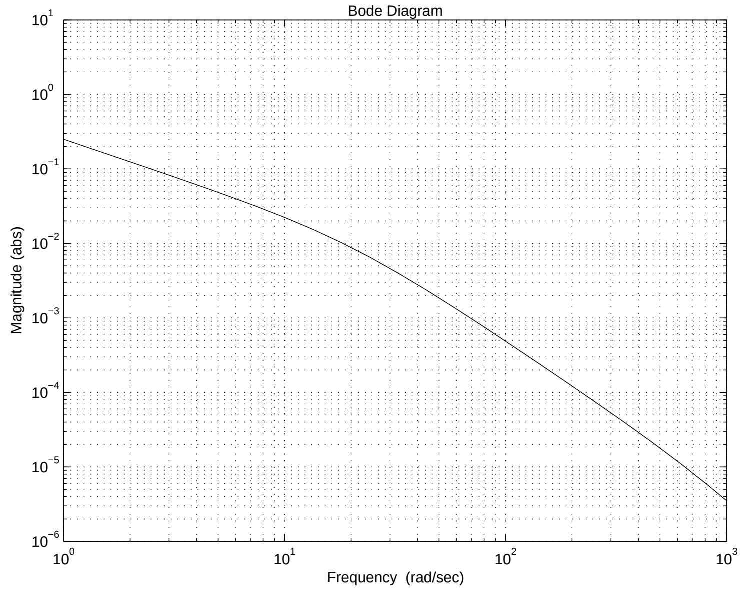
(c) Bestäm en återkoppling

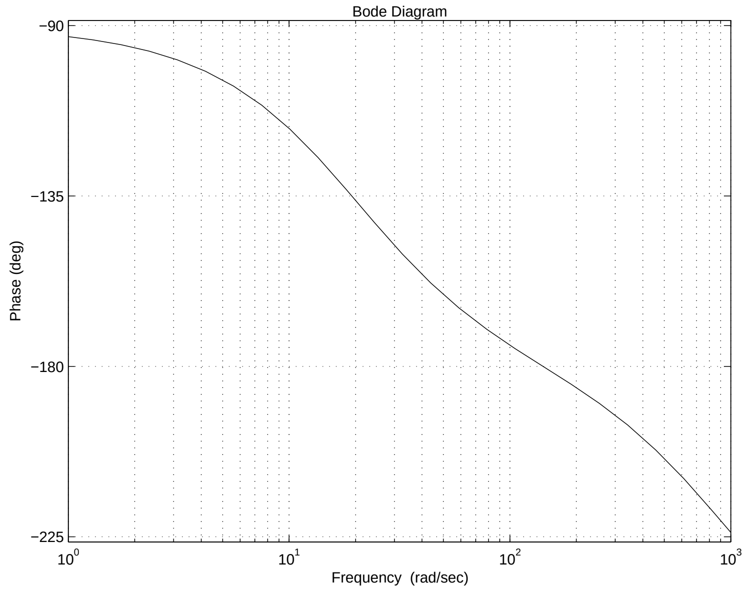
$$U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$$

för systemet ovan, sådan att reglersystemet uppfyller följande krav:

- $e_0 = 0$.
- $\omega_c = 100$ rad/s.
- $\phi_m \geq 50°$

(4p)


Bode Diagram
Magnitude (abs)
Frequency (rad/sec)


Bode Diagram
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)

5. Ivar och Emma sitter och funderar över värmesystemet i sitt nyinköpta hus (ett renoveringsobjekt i åttamiljonersklassen) medan de lyssnar på Racing in the street med Bruce Springsteen och The E Street Band (liveinspelningen från Meadowlands Arena 1981).

   Temperaturen i huset kan mycket förenklat beskrivas med modellen

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

   där $U(s)$ och $Y(s)$ är Laplacetransformerna för den tillförda effekten respektive temperaturen i huset samt

$$G(s) = \frac{k}{sT+1}$$

   Temperaturen styrs med en PI-återkoppling på formen

$$U(s) = (K_P + K_I \frac{1}{s})(R(s) - Y(s))$$

   Det Emma och Ivar främst funderar över är om reglersystemet är robust mot fel i den modell som användes för att ställa in PI-återkopplingen. Den tillförda värmeeffekten sker via en ventil som har en viss dynamik, vilket innebär att systemet i verkligheten beskrivs av

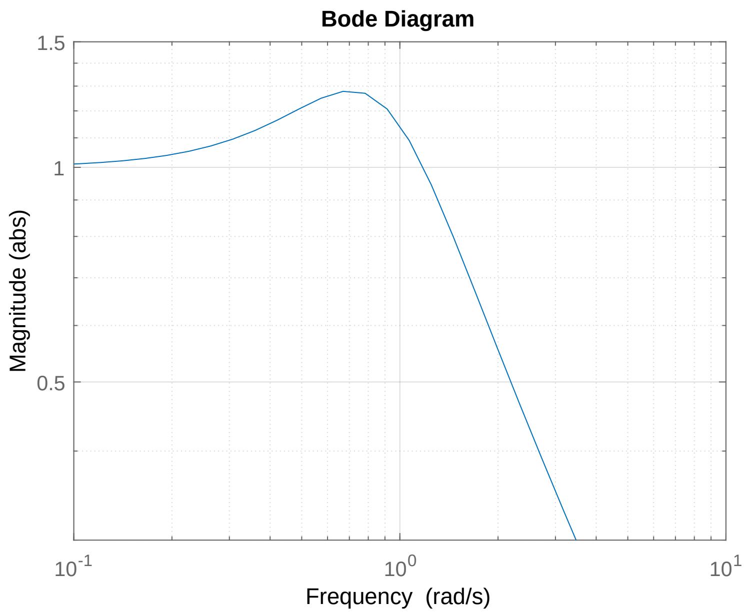
$$G^0(s) = \frac{\alpha}{(s+\alpha)} \cdot \frac{k}{(sT+1)}$$

   (a) Ange det relativa modelfelet $\Delta G(s)$ för detta fall. (2p)

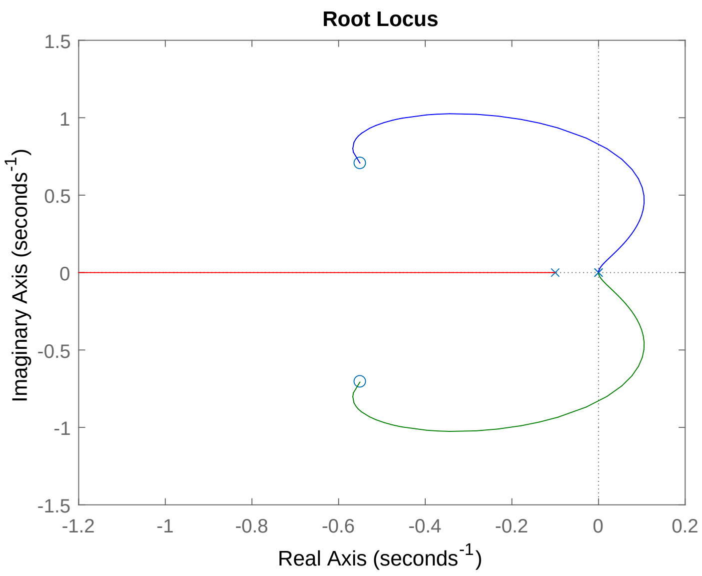
   (b) Figur 5 visar $\mid G_C(i\omega) \mid$ för det återkopplade system som erhålls när PI-återkopplingen bestämts utgående från modellen $G(s)$. Skissa absolutbeloppet av inversen av det relativa modellfelet och gör en uppskattning av hur stort/litet α kan vara för att man ska kunna garantera stabilitet hos det återkopplade systemet. Låt denna gräns för α betecknas α_{robust}. (3p)

   (c) Figur 6 visar rotorten med avseende på α för det återkopplade systemets karakteristiska ekvation när $F(s)$ används på det verkliga systemet $G^0(s)$. Beskriv hur det återkopplade systemets stabilitet beror av α. Antag att det värde på α för vilket de två rötterna i figuren passerar imaginäraxeln betecknas med α_{rotort}. Vilket av alternativen $\alpha_{rotort} \leq \alpha_{robust}$ eller $\alpha_{rotort} \geq \alpha_{robust}$ gäller? (3p)

   (d) Eftersom den huvudsakliga störningen i detta reglersystem är utetemperaturen, vilken kan mätas, är det naturligt att använda denna information för att styra inomhustemperaturen. Vilka är möjligheterna och begränsningarna med att göra detta? Kan reglersystemet bli instabilt genom att använda mätningen av utetemperaturen? (2p)



Figur 5: Figur till uppgift 5 b.



Figur 6: Figur till uppgift 5 c.

Lösningsförslag till tentamen i TSRT22, TSRT19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2017-10-23

Svante Gunnarsson

1. (a) Stegsvarets snabbhet bestäms i huvudsak av polernas avstånd till origo. Överslängens storlek avgörs av den relativa dämpningen, vilken bestäms av vinkeln mellan polernas placering och negativa realaxeln. Detta ger:

    - Stegsvaren III och IV har lika stor översläng, men IV är snabbare. Polplaceringarna i A och C har samma vinkel till negativa realaxeln, men polerna i C ligger längre från origo. Detta ger kombinationerna A - III samt C - IV.
    - Polerna i D har samma avstånd till origo som i C men mindre vinkel, d v s större relativ dämpning och därmed mindre översläng. Detta innebär kombinationen D - I.
    - Polerna i B har störst vinkel till negativa realaxeln, d v s lägst relativ dämpning, vilket innebär störst översläng. Detta ger kombinationen B - II.

    Svar: A- III, B - II, C - IV, D - I

   (b)
    - Styrsignaler: Rodervinklar, motorpådrag
    - Utsignaler: Hastighet och kurs
    - Störsignal: Vindar och strömmar.

   (c) Med den givna insignalen vet vi att utsignalen (när den transienta delen dött ut) ges av

    $$y(t) = \mid G(i \cdot 2) \mid \sin(2t + \arg G(i \cdot 2))$$

    Den givna överföringsfunktionen ger

    $$\mid G(i\omega) \mid = \frac{k}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} \qquad \phi = \arg G(i\omega) = -\arctan \omega T$$

    Utsignalen är tidsförskjuten ca 0.4 sek jämfört med insignalen, d v s $\Delta t = \phi/\omega = 0.4$. Detta ger $\phi = 0.8$. Vidare fås

    $$-\arctan 2T = -0.8$$

    vilket ger $T = 0.5$. Utsignalens amplitud är ca 2.8 vilket ger

    $$\mid G(i2) \mid = \frac{k}{\sqrt{2}} = 2.8$$

    vilket ger $k = 4$.

    Svar:

    $$G(s) = \frac{4}{0.5T + 1}$$

   (d) Med ett enhetssteg (steg med amplitud ett) som insignal kan k direkt läsas av som utsignalens slutvärde. Tidskonstanten T kan läsas av som den tidpunkt då stegsvaret nått 63% av sitt slutvärde.

2. (a) Altnernativen 3 och 4 har $K_I > 0$ d v s integralverkan. Detta medför att det återkopplade systemet får statisk förstärkning ett, d v s $\mid G_C(0) \mid= 1$ vilket gäller i A och D. Ett större värde på K_I ger ett mera oscillativt återkopplat system, d v s större resonanstopp, vilket ger kombinationerna 4 - D och 3 - A. Med enbart proportionell återkoppling fås att $\mid G_C(0) \mid$ blir närmare ett när K_P väljs större. Vidare blir det återkopplade systemet mera oscillativt, d v s större resonanstopp, för större värde på K_P. Detta ger kombinationerna 2 - B och 1 - C.

   Svar: 1 - C, 2 - B, 3 - A, 4 - D.

   (b) Överföringsfunktionen från referenssignal till utsignal ges av

$$G_C(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

   Med

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

   och

$$F(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D$$

   fås den karakteristiska ekvationen

$$s^3 + (2 + K_D)s^2 + (K_P + 1)s + K_I = 0$$

   (c) Tre poler i -1 motsvarar den karakteristiska ekvationen

$$(s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

   Detta erhålls med koefficienterna $K_P = 2, K_I = 1, K_D = 1$.
   Käsnlighetsfunktionen ges av

$$S(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)}$$

   Eftersom $F(s)$ innehåller integration fås att $F(s) \to \infty$ då $s \to 0$ vilket medför att $S(0) = 0$.

3. (a) Det angivna valet av tillståndsvariabler ger

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

samt

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -\frac{f}{J}\dot{y}(t) + \frac{1}{J}u(t) = -\frac{f}{J}x_2(t) + \frac{1}{J}u(t)$$

vilket på matrisform ger den angivna tillståndsmodellen.

(b) Eftersom matrisen är triangulär kan man läsa av egenvärdena ur diagonalelementen, vilket ger polerna $\lambda = 0$ och $\lambda = -f/J$.

(c) Det återkopplade systemets poler ges av den karakteristiska ekvationan

$$\det(\lambda \cdot I - (A - BL)) = 0$$

där

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}$$

och

$$A - BL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -0.1 - l_2 \end{pmatrix}$$

Detta ger

$$\lambda^2 + (0.1 + l_2)\lambda + l_1 = 0$$

Vi jämför denna med ekvationen

$$(\lambda + \alpha)^2 = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2 = 0$$

Jämförelse ger $l_1 = \alpha^2 \quad l_2 = 2\alpha - 0.1$. Återkopplingen blir därför

$$u(t) = -\alpha^2 x_1(t) - (2\alpha - 0.1)x_2(t) + l_0 r(t)$$

(d) Med återkopplingen

$$u(t) = -l_1 x_1(t) - l_2 x_2(t) + l_0 r(t)$$

insatt i ekvationen för robotarmen och $v(t) = v_0$ fås

$$J\ddot{y}(t) = -l_1 x_1(t) - l_2 x_2(t) + l_0 r(t) - 0.1 x_2(t) + v_0$$

I stationär tillstånd, och med antagandet $r(t) = 0$, gäller $\ddot{y}(t) = \dot{x}_2(t) = 0$ samt $\dot{x}_1(t) = x_2(t) = \dot{y}(t) = 0$, vilket ger

$$0 = -l_1 y(t) + v_0$$

vilket ger

$$y(t) = v_0/l_1 = v_0/\alpha^2$$

4. (a) Det återkopplade systemet är stabilt om $\mid G_O(i\omega) \mid < 1$ vid den vinkelfrekvens där $\arg G_O(i\omega) = -180°$. Detta inträffar vid ca $\omega_P = 140$ rad/s, och där är (approximativt) $\mid G(i\omega_P) \mid = 0.0002$. Detta ger stabilitetskravet

$$\mid G_O(i\omega_P) \mid = K \mid G(i\omega_P) \mid = K \cdot 0.0002 < 1$$

vilket ger kravet $K < 5000$.

(b) Felkoefficienterna ges enligt läroboken, sid 62, av

$$e_0 = \frac{1}{1 + G_O(0)}$$

respektive

$$e_1 = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG_O(s)}$$

Med $G(s)$ given enligt uppgiften och $F(s) = K$ fås

$$e_0 = 0$$

eftersom $G(s)$ innehåller ett s i nämnaren. Vidare fås

$$e_1 = \frac{1}{0.25K}$$

Felkoefficienterna är definierade om $e(t)$ har ett gränsvärde, d v s om det återkopplade systemet är stabilt. Detta gäller, enligt a), då $K < 5000$.

(c) Vid $\omega = 100$ rad/s fås $\arg G(i100) \approx -175°$. Det behövs alltså en fasavancering på ca 45°, vilket fås med en lead-kompensering med $\beta = 0.15$. Den maximala fasavanceringen ska placeras vid $\omega_{c,d} = 100$ rad/s, vilket ger $\tau_D = 0.026$.

För att åstadkomma att skärfrekvensen placeras där vi önskar ska bestämma K så att

$$\mid G_O(i\omega_{c,d}) \mid = K \frac{1}{\sqrt{\beta}} \mid G(i\omega_{c,d}) \mid = 1$$

Bodediagrammet ger att $\mid G(i\omega_{c,d}) \mid = 0.0005$ vilket ger

$$K = \frac{\sqrt{\beta}}{0.0005} = 775$$

Enligt resonemanget i uppgift b) vet vi att $e_0 = 0$ tack vare att systemets överföringsfunktion har ett s i nämnaren, vilket gör att det inte behövs någon lag-kompensering. Detta ger

$$F(s) = 775 \frac{0.026s + 1}{0.026 \cdot 0.15s + 1}$$

5. (a) (Deluppgift a) och b) överensstämmer i stor utsträckning med uppgift 6.7 i exempelsamlingen.) Det verkliga systemet ges av

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta G(s)) = \frac{\alpha}{s+\alpha} G(s)$$

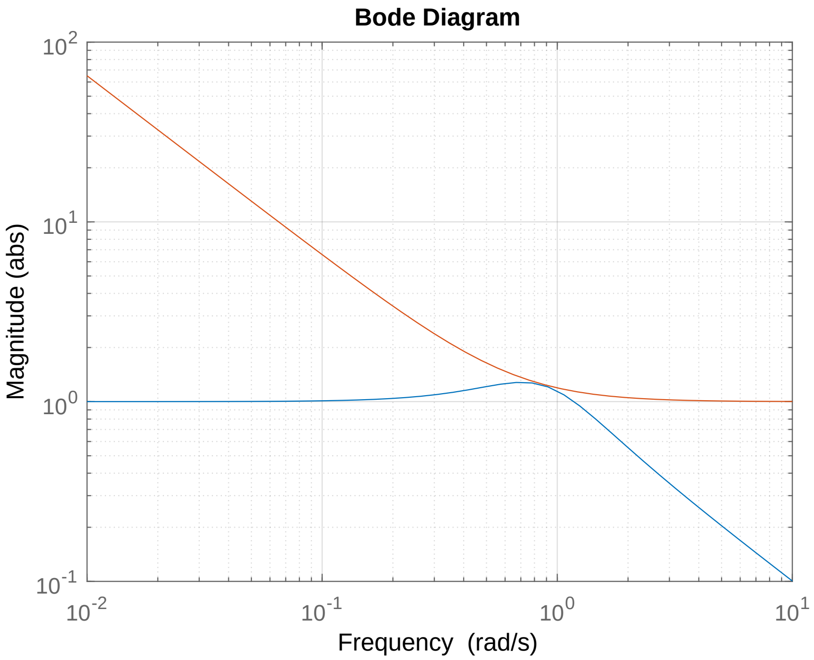
vilket ger att

$$\Delta G(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} - 1 = \frac{-s}{s+\alpha}$$

(b) Absolutbeloppet av det inversa modellfelet ges av

$$\frac{1}{\mid \Delta G(i\omega) \mid} = \frac{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}{\omega}$$

Figuren visar denna kurva tillsammans med $\mid G_C(i\omega) \mid$ för $\alpha = 0.65$.



För att uppskatta vid vilket värde kurvorna tangerar varandra kan vi approximativt anta att den kritiska punkten är där $\mid G_C(i\omega) \mid$ är som störst. Detta inträffar vid $\omega = 0.8$ och då är $\mid G_C(i\omega) \mid = 1.25$. Robusthetskriteriet

$$\mid G_C(i\omega) \mid < \frac{1}{\mid \Delta G(i\omega) \mid}$$

ger

$$1.25 < \frac{\sqrt{0.8^2 + \alpha^2}}{0.8}$$

vilket ger $\alpha > 0.6$. Det återkopplade systemet är alltså garanterat stabilt när $F(s)$ används på $G^0(s)$ om $\alpha > 0.6$. Robusthetskriteriet är ett tillräckligt, men ej nödvändigt, villkor, vilket innebär att det återkopplade systemet kan vara stabilt även för mindre värden på α.

(c) För små värden på α har det återkopplade systemet två poler i höger halvplan, d v s det är instabilt. För ökande α närmar sig dessa poler vänster halvplan för att passera imaginäraxeln för $\alpha = \alpha_{rotort}$. För ännu större värden på α är alla poler i vänster halvplan, d v s det återkopplade systemet är stabilt. Rotorten ger ett nödvändigt och tillräckligt villkor, vilket innebär att $\alpha_{rotort} \leq \alpha_{robust}$ gäller.

(d) När störningen kan mätas kan man använda s k framkoppling, där man via en lämpligt vald överföringsfunktion låter mätningen av störningen direkt påverka styrsignalen. En begränsning i detta förfarande är att man behöver ha en tillräckligt bra modell av hur störningen påverkar systemet. Stabiliteten hos reglersystemet påverkas dock ej.