

Lösningar till tentamen i Reglerteknik

Tentamensdatum: 23 april 2019

1. (a) Laplacetransformering av differentialekvationen ger överföringsfunktionen $G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$. Figur 1 ger att insignalen är en sinussignal, $u(t) = \sin(\omega t)$, vilket ger att utsignalen blir på formen $y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \phi)$ där $\phi = \arg(G(i\omega))$.

Ur figur 1 utläses att periodtiden för insignalen är $T = 3.14s$, vilket ger vinkelfrekvensen $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$. Vidare kan tidsförskjutning, 0.4 sek, och förstärkning, 1.4, avläsas ur figuren. Tidsförskjutningen ger att fasförskjutningen ωT är 0.8 rad.

Ur sambanden

$$\begin{aligned} |G(i\omega)| &= \frac{k}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \\ \arg(G(i\omega)) &= -\arctan(\tau\omega) \end{aligned}$$

löses sedan $k = 2$ och $\tau = 0.5$ ut.

- (b) (i) och (ii) har statisk förstärkning 2 respektive 0.5, D och A har slutvärde 2 respektive 0.5. (iv) har komplexkonjugerade poler, av stegsvar C och B har endast C översläng.

Svar: (i)-D, (ii)-A, (iii)-B, (iv)-C.

- (c) Det återkopplade systemets poler kan inte placeras godtyckligt eftersom det inte är styrbart (kontrollera styrbarhetskriteriet, eller ännu enklare notera att dynamiken för första tillståndet är $\dot{x}_1(t) = -x_1(t)$, dvs det första tillståndet är helt frikopplat från x_2 och u och går således inte påverka, och denna dynamiks pol i -1 är låst.).

2. (a) Oändlig förstärkning vid låga frekvenser gör att B, C kopplar till I, II ($G_c(0) = 1$). Vidare matchar resonanstoppnen i I skärfrekvensen i B som dessutom har liten fasmarginal. På samma sätt matchar den mindre resonanstoppnen i II väl skärfrekvensen i C (något större fasmarginal). B-I, C-II.

Vidare har A något större lågfrekvensförstärkning än D vilket parar ihop A-III och D-IV pga lågfrekvensförstärkningen i G_c . Samma resultat fås genom att jämföra resonanstopparna och skärfrekvens och fasmarginal i systemen.

- (b) Känslighetsfunktionen är $S(s) = \frac{1}{1+F(s)G(s)} = \frac{s(s+1)}{s(s+1)+K}$, med förstärkning $|S(i0)| = 0$ vid vinkelfrekvensen $\omega = 0$.

- (c)

$$|S(i\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^4 + \omega^2}}{\sqrt{(\omega^2 - K)^2 + \omega^2}}$$

För ω tillräckligt högt gäller det att förstärkningen är större än 1

$$\begin{aligned} |S(i\omega)| > 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\omega^4 + \omega^2}}{\sqrt{(\omega^2 - K)^2 + \omega^2}} > 1 \Leftrightarrow \frac{\omega^4 + \omega^2}{(\omega^2 - K)^2 + \omega^2} > 1 \\ &\Leftrightarrow \omega^4 + \omega^2 > (\omega^2 - K)^2 + \omega^2 \Leftrightarrow \omega^4 > \omega^4 - 2\omega^2 K + K^2 \\ &\Leftrightarrow 2\omega^2 K > K^2 \Leftrightarrow \omega > \sqrt{\frac{K}{2}} \end{aligned}$$

3. (a) Systemet ges av

$$G(s) = \frac{1}{0.1s^2 + 0.01s}$$

Använd en lead-lag-kompensering för att nå de uppställda målen. Fasen vid den önskade skärfrekvensen $\omega_{cd} = 10 \text{ rad/s}$ är ca -179° , d v s vi måste fasavancera med $60^\circ - 1^\circ + 6^\circ = 65^\circ$, där de extra 6° läggs till för den eventuella laglänkens försämring av fasen. Ekvation 5.4 ger $\beta \approx 0.05$, vilket ger $\tau_D = \frac{1}{\omega_{cd}\sqrt{\beta}} = \frac{1}{10\sqrt{0.05}} \approx 0.45$. Uträkning av K för att få den önskade skärfrekvensen ges av

$$K|G(i\omega_{cd})||F_{lead}(i\omega_{cd})| = 1$$

och detta ger

$$K \approx \frac{1}{0.1\frac{1}{\sqrt{\beta}}} \approx 2.24$$

Den fasavancerande länken ges nu av

$$F_{lead}(s) = 2.24 \frac{0.45s + 1}{0.0225s + 1}$$

Reglerfelet ges av

$$E(s) = R(s) - Y(s) = -Y(s) = -G(s)(V(s) + F(s)E(s))$$

vilket ger

$$E(s) = \frac{-G(s)}{1 + G(s)F(s)}V(s) + \frac{1}{1 + F(s)G(s)}R(s)$$

Utgående från att $r(t) = 0$ och att $v(t)$ är ett steg med amplitud ett ger slutvärdesteoremet att

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G(s)}{1 + G(s)F(s)} \frac{1}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-1}{(0.1s^2 + 0.01s)(0.0225s + 1) + 2.24 \cdot (0.45s + 1)} \approx -0.446 \end{aligned}$$

dvs $|e(t)| \approx 0.446 > 0.01$ i stationärt tillstånd. En laglänk behövs! Samma räkningar med en laglänk ger kravet $\frac{\gamma}{2.24} \leq 0.01$ och $\gamma = 0.0224$. Välj sedan $\tau_I = \frac{10}{\omega_{cd}} = 1$ och lag-länken fås till

$$F_{lag}(s) = \frac{s + 1}{s + 0.0224}$$

Kravet $|F(0)| < \infty$ uppfylls med dessa val av lead-lag-parametrar; $|F_{lead}(0)F_{lag}(0)| = 100 < \infty$.

- (b) (1) Eftersom $F(s)$ har en faktor s i nämnaren uppfylls inte kravet att $|F(0)| < \infty$.
 (2) Eftersom $F(s)$ har högre gradtal i täljaren än i nämnaren går $|F(i\omega)|$ mot ∞ då $\omega \rightarrow \infty$, d v s det strider mot kravet att högfrekvensförstärkningen inte får vara onödigt hög.

4. (a) Det återkopplade systemet ges av

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (l_1 \quad l_2) x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r(t) \\ &= \begin{pmatrix} -1-l_1 & -l_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r(t)\end{aligned}$$

Det slutna systemets egenvärden fås ur den karakteristiska ekvationen

$$\begin{aligned}0 &= \det(\lambda I - (A - BL)) \\ &= (\lambda + 1 + l_1)(\lambda + 1) + l_2 \\ &= \lambda^2 + (2 + l_1)\lambda + (1 + l_1 + l_2)\end{aligned}$$

Vi önskar placera polerna i $-\alpha$, dvs

$$0 = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2$$

En jämförelse mellan ekvationerna ger $l_1 = 2\alpha - 2$ och $l_2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1$.

Svar: Återkopplingen ges av:

$$u(t) = -(2\alpha - 2 \quad \alpha^2 - 2\alpha + 1)x(t) + r(t).$$

- (b)
- Överslängen för det återkopplade systemet är noll.
 - Systemets snabbhet ges av polerna avstånd till origo, vilket ger att ett stort värde på α ger en kortare stigtid, medan ett mindre värde ger en längre stigtid.
 - I praktiken avgörs dock hur snabbt systemet kan göras av hur stora insignaler som är möjliga.
- (c) Nackdelen med förslaget i uppgiften är framförallt att x_2 måste deriveras, vilket typiskt är svårt då vi har mätbrus i praktiken. Dessutom tas inte hänsyn till informationen i signalen $u(t)$ som ger extra stöd i att lista ut vad nivån borde vara, givet en historia av (brusiga) mätningar av x_2 .
- (d) Använd en observatör där även hänsyn tas till skattningsfelet:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

Observatörens K -matris måste beräknas så att egenvärdena till

$$(A - KC)$$

placeras i vänster halvplan. Slutligen bildas återkopplingen som

$$u = -L\hat{x} + r$$

5. (a) Från robusthetskriteriet har vi att $|G_c(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta G(i\omega)|}$ för alla ω . Insättning ger $|G_c(i\omega)| < \frac{1}{|\alpha|}$.
 Då $|\alpha| < 0.5$ är $|G_c(i\omega)| < \frac{1}{0.5}$ ett krav för stabilitet.

(b) Kravet måste gälla överallt, och således även i fasskärfrekvensen

$$\begin{aligned} |G_c(i\omega_p)| &= \left| \frac{G^O(i\omega_p)}{1 + G^O(i\omega_p)} \right| = \left| \frac{\frac{-1}{A_m}}{1 + \frac{-1}{A_m}} \right| = \left| \frac{-1}{A_m - 1} \right| \\ &= \frac{1}{A_m - 1} < \frac{1}{0.5} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < A_m - 1 \Leftrightarrow A_m > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} G^O(i\omega) &= G(i\omega)e^{i\phi(\omega)} = G(i\omega)(1 + \Delta G(\omega)) \\ \Rightarrow \Delta G(i\omega) &= e^{i\phi(\omega)} - 1 = \underbrace{\cos(\phi(\omega)) + i \sin(\phi(\omega))}_{\text{Eulers formel}} - 1 \\ |\Delta G(i\omega)| &= \sqrt{(\cos(\phi(\omega)) - 1)^2 + \sin^2(\phi(\omega))} \\ &= \sqrt{\cos^2(\phi(\omega)) - 2\cos(\phi(\omega)) + 1 + \sin^2(\phi(\omega))} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(\phi(\omega))} \end{aligned}$$

(d) Robusthetskriteriet ger, tillsammans med uppgift (c), att

$$|G_c(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta G(i\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos(\phi(i\omega))}}$$

för alla ω . $\frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos(\phi(i\omega))}}$ är minimal då $\cos(\phi(i\omega)) = -1$, vilket ger $|G_c(i\omega)| < \frac{1}{2}$.

Felkoefficienten ges av $e_0 = |S(0)| = |1 - S(0)| = |1 - G_c(0)|$, vilket leder till att $e_0 > 1 - 0.5 = 0.5$ om kravet uppfylls.