Lösningsförslag till tentamen i Reglerteknik (TSRT03/19) 2019-01-19

1. (a) Polerna till $G_1(s)$ ligger i $-1 \pm i\sqrt{3}$ och polerna till $G_2(s)$ ligger i $-2 \pm i2\sqrt{3}$. Polerna till de båda systemen har således poler med exakt samma förhållande mellan real- och komplexdel, och det enda som skiljer är avstånd till origo. Avstånd till origo skalar tiden i tidsplanet (ju närmare origo desto långsammare och tvärtom), och sålunda har stegsvaret till $G_2(s)$ kortast stigtid .

   (b) Utsignalen ges av
$$y(t) = 3|G(i3)|\sin(3t + \arg(G(i3))$$
   där
$$|G(i3)| = \frac{4}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \approx 1.26$$
   och
$$\arg G(i3) = -\arctan 3 \approx -1.25$$
   Detta ger
$$y(t) = \underbrace{3\frac{4}{\sqrt{10}}}_{\approx 3.79}\sin(3t - 1.25)$$

   (c) **Styrsignal:** Styrvinkel och kraft på pedalerna.
   Utsignal: Lutning, riktning (justerad med styrvinkel) och hastighet (justerad med pedalkraft)
   Störning: Förflyttning av kroppen (påverkar lutning), med/motvind och uppförs/nedförsbacke (påverkar hastighet).

   (d) Linnea har rätt. Både Linus och Linnea har korrekt konstaterat att regulatorn behöver en I-del för att det stationära reglerfelet ska bli noll. Men vi bör därmed inte försaka P-delen, då endast en I-regulator skulle ge oerhört dåliga stabilitetsmarginaler jämfört med en PI-regulator, och förmodligen ge upphov till kraftiga oscillationer etc. Man använder aldrig mer I-del än vad som behövs för att få bort stationära fel tillräckligt snabbt. Basen i regulatorn är P-delen, och sedan läggs I-del (och/eller D-del) till för finputsning.

2. (a) Styrlagen laplacetransformerad: $U(s) = R(s) - 6(s+6)Y(s)$. Stoppa in i $Y(s) = G(s)U(s)$ och bryt ut $Y(s)$
$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+6(s+6)G(s)}R(s) = ... = \underbrace{\frac{1}{(s+14)(s+4)}}_{G_c(s)}R(s).$$
   Polerna till det slutna systemet ligger alltså i -14 och -4. Eftersom den statiska förstärkningen är $G_c(0) = 1/56$ så går utsignalen mot $1/56$, och det stationära reglerfelet bli $1 - 1/56 = 55/56$ (dvs uruselt, vi borde använt $U(s) = 56R(s) - 6(s+6)Y(s)$).

   (b) Överföringsfunktionen skrivs på gemensam nämnare som
$$G(s) = \frac{s^2+3s+7}{s^2+2s+4}.$$
   Vi vet att $Y(s) = G(s)U(s)$, invers laplacetransform ger
$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 4y = \ddot{u} + 3\dot{u} + 7u.$$

(c) Stegsvar A och D går stationärt mot 4 och 3, de övriga mot 1, genom att läsa av den stationära förstärkningen i bodediagramen ($G(0i)$) fås A-III och D-II. Vidare är resonanstoppen kraftigare i I än i IV vilket återspeglas som i större översläng och mer oscillationer: C-I och B-IV.

Svar: A-III, C-I, B-IV. D-II

3. (a) Enligt bodediagrammet är fas-skärfrekvensen $w_p \approx 7$ rad/s och förstärkningen vid denna frekvens $|G(iw_p)| \approx -3$ dB. Amplitudmarginalen är då $A_p \approx 10^{3/20} \approx 1.4$. P-regulatorn kan således förstärka maximalt $K \approx 1.4$ innan det återkopplade systemet blir instabilt.

(b) En deriverande regulator $F(s) = K_D s$ har ett amplituddiagram med konstant lutning +20 dB/dekad och förstärkning 1 vid $w = 1/K_D$. Amplituddiagrammet för det öppna systemet $F(s)G(s)$ kommer därför att luta 20 dB/dekad mindre negativt med denna regulator jämfört med amplituddiagrammet för systemet $G(s)$ och förstärkningen vid vid $w = 1/K_D$ är densamma för $F(s)G(s)$ som för $G(s)$.

Vidare har en deriverande regulator $F(s) = K_D s$ en konstant fas på $+90°$. Därmed kommer det öppna systemet $F(s)G(s)$ att för alla frekvenser få $90°$ mer fas jämför med systemet $G(s)$.

En rent deriverande regulator görs dock inte i praktiken eftersom det skulle kräva obegränsat stor förstärkning för signaler som ändrar sig snabbt (tex ett steg). Vidare, imågna fall skulle det vara direkt olämpligt med en rent deriverande regulator då brus med snabb variation skulle förstärkas kraftigt i deriveringen.

(c) För att uppfylla kraven använder vi oss av en lead-länk.

$$F(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1} \tag{1}$$

Observera att eftersom systemet redan innehåller en integrator kommer det stationära felet att gå mot noll för det slutna systemet, ty

$$e_0 = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+F(s)G(s)}\frac{1}{s} = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} F(s)G(s)} = 0$$

eftersom $\lim_{s\to 0} G(s) = \infty$. Därmed behövs ingen lag-länk för att uppfylla kravet för stationärt fel.

Parametrarna för lead-länken bestäms enligt följande:

Vid den önskade skärfrekvensen $\omega_{c,d} = 10$ rad/s är fasen $\arg G(i\omega_{c,d}) = -200°$. Vi har alltså $-20°$ fasmarginal och måste öka $\phi_{max} = 30° - (-20°) = 50°$ för att uppnå den önskade fasmarginalen 30°. I figur 5.13 på sidan 106 i läroboken ser vi att $\beta = 0.13$ borde räcka för att klara kravet på fasmarginal. För att placera den maximala fasökningen vid den önskade skärfrekvensen väljer vi $\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} = 0.28$.

För att $w_{c,d} = 10$ rad/s verkligen ska vara en skärfrekvens måste följande gälla

$$K\underbrace{|F_{lead}(i\omega_{c,d})|}_{=\frac{1}{\sqrt{\beta}}}\underbrace{|G(i\omega_{c,d})|}_{\approx 0.32} = 1 \quad\Rightarrow\quad K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_{c,d})|} \approx 1.14$$

där $|G(i\omega_{c,d})| \approx -10 \text{ dB} = 10^{-10/20} \approx 0.32$ kan avläsas ur bodediagrammet för G.

Regulatorn ges då av (1) med parametrarna valda enligt ovan.

4. (a) **Nej** (Vi ser en rotort med tre startpunkter och tre tillhörande grenar. Således analyserar vi en karakteristisk ekvation av ordning tre. Detta kan även inses genom att helt enkelt se att vi har en återkopplingsstruktur innehållande ett delsystem med två poler (jetmotorn), och ett annat med en pol (integratorn), och när man sluter loopen kan det inte helt plötsligt bli ett uttryck av högre ordning).
   (b) **Ja**. (Vi har två startpunkter ($\alpha = 0$) i högra halvplanet, således instabilt för små α).
   (c) **Ja**. (Rotorten visar att de två initialt instabila rötterna går in i vänstra halvplanet, samtidigt som den tredje polen hela tiden håller sig där)
   (d) **Går ej avgöra**. (Rotorten visar bara hur rötterna rör sig, inget om deras exakta inbördes förhållande för specifika värden på den analyserade parametern)
   (e) **Nej**. (För stora α blir de komplexa rötterna mer oscillativa, men alla poler förblir stabila.

5. (a) Det slutna systemets poler ges av rötter till polynomet

$$\det(sI - A + BL) = \det \begin{pmatrix} s+0.1 & 0.2 \\ l_1 - 3 & s+3+l_2 \end{pmatrix} = s^2 + (3.1 + l_2)s + 0.1l_2 - 0.2l_1 + 0.9.$$

   Jämförelse med önskat polynom $(s+2-2i)(s+2+2i) = s^2+4s+8$ ger styrlagen

$$u = r - \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} x = r - \begin{pmatrix} -35.05 & 0.9 \end{pmatrix} x.$$

   (b) Observatörens poler ges av rötter till polynomet

$$\det(sI - A + KC) = \det \begin{pmatrix} s+0.1 & 0.2+k_1 \\ -3 & s+3+k_2 \end{pmatrix} = s^2 + (3.1 + k_2)s + 3k_1 + 0.1k_2 + 0.9.$$

   Jämförelse med polynomet $(s+5)^2 = s^2+10s+25$ ger observatörsförstärkningen $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7.8 & 6.9 \end{pmatrix}^T$.

   (c) Till att börja med så noteras att vi har att överföringsfunktion från referens till utsignal, $G_c(s)$, är samma i de två varianterna (premiss i uppgiften). Således är även överföringsfunktion från referens till reglerfelet samma (ekv 3.23 i boken).

   I den komplementära känslighetsfunktionen ser vi att design II enligt robusthetskriteriet ger ett robustare system (dvs mindre troligt att det blir instabilt p.g.a modellfel) eftersom vi kan tillåta ett $1/|\Delta_G|$ som är mindre med denna design, dvs ett större $|\Delta_G|$, eftersom komplementära käsnlighetsfunktionen är mindre.

   Hur systemet påverkas av störningar på utsignalen ges av känslighetsfunktionen. Vi ser där att med design I dämpas störningar med låg frekvens mycket men störningar runt frekvensen 7 rad/s förstärks mer än med design II. Vilken design som ska väljas beror alltså på i vilka frekvenser störningarna finns.

   Systemets påverkan av mätstörningar ges av den komplementära känslighetsfunktionen. Vi ser att dessa förstärks mer av design I än design II för alla frekvenser.