Lösningar till tentamen i TSRT19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2018-06-01

Johan Löfberg

1. (a) Exempelvis:
   Styrsignal $u(t)$ - gaspådrag/broms eller pålagt moment på drivlina för att accelerera och retardera lastbilen.
   Utsignal $y(t)$ - avstånd till framförande lastbil (mätes t.ex med radar)
   Referens $r(t)$ - Önskat avstånd till lastbilen framför.

   (b) Utsignalen kommer ges av $A|G(i\omega)|\sin(i\omega t + arg(G(i\omega)))$ (antaget $G(s)$ stabilt). Med andra ord, samma frekvens, fasförskjutning som är frekvensberoende, och en amplitud som $|G(i\omega)|$ större (eller mindre) än den ingående amplituden, dvs frekvensberoende. De enda inkorrekta påståendena är således (c) och (f).

   (c) Systemet är instabilt och således går utsignalen mot $\pm\infty$ (tecken beroende på initialtillstånd om man gör en grundlig analys).

   (d) Nämnaren är ett 4:e gradens polynom, således krävs fyra tillstånd (nämnaren har lägre ordning). Ses enkelt om man t.ex utvecklar polynomen och använder styrbar eller kanonisk form.

   (e) Summerar vi de två överföringsfunktionerna så får vi summan $\frac{1}{2}$. Detta kan ej stämma då vi vet att vi alltid har $S(s) + T(s) = 1$ oavsett val av regulator. Kollegan ljuger eller har gjort ett misstag.

2. (a) Rotort 1 och 3 uppvisar enbart reella poler. Rotort 2 och 4 påvisar komplexvärda poler. Stegsvar A och B har inga oscillationer för något K. Stegsvar C och D har oscillationer för tillräckligt stora K.
   Rotort 3 har en dominerande pol som ej ändrar sig nämnvärt. Stegsvar A har stegsvar med ungefär konstant stigtid. Således (A,3) och (B,1).
   Rotort 4 visar på ett system som kan bli instabilt. Stegsvar i C är på gränsen instabilt. Således (C,4) och (D,2).
   Notera att man kan lösa uppgiften utan att egentligen veta vilken av de tre stegsvaren som är vilka, dvs alla stegsvar skulle kunna ha varit heldragna.

   (b) Om vi ansätter $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ och använder $F(s) = K$ så får vi slutna systemet $\frac{KN(s)}{D(s)+KN(s)}$. Rotorten är alltså ritad för $D(s) + KN(s)$. Startpunkterna är per definition rötterna till $D(s)$. System 1, 2 och 4 har en startpunkt i origo, dvs en pol i 0. Således ser $G(s)$ ut som $\frac{N(s)}{s\tilde{D}(s)}$ för dessa system, dvs de har integralverkan. System med integralverkan som återkopplas har statisk förstärkning 1.

   (c) Slutna systemet från R till Y ges av $\frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$. Insättning ger $\frac{s+1}{(s+2)(s+3)+(s+1)} = \frac{s+1}{s^2+6s+7}$ som har stabila rötter (notera att polen $(-s + 1)$ i regulatorn förkortades bort)
   Styrsignalen ges av $U(s) = F(s)(R(s) - G(s)U(s)$ ur vilket vi får $U(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)G(s)}R(s)$. Insättning ger $\frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{(-s+1)((s+2)(s+3)+(s+1))}$. Det viktiga vi ser här är att vi har en instabil pol. Vid ett stegsvar kommer alltså styrsignalen att gå mot oändligheten. Det öppna systemet har ett problematiskt instabilt nollställe (som kan ge underslängar etc). I reglerdesignen har vi försökt trolla bort detta ur det slutna system genom att förkorta bort det i regulatorn. Det straffar sig dock uppenbarligen.

3. (a) Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation ges av
   $$\det(\lambda \cdot I - (A - BL)) = 0$$
   d v s
   $$\lambda^2 + (2 + l_1)\lambda + (1 + l_1 + l_2) = 0$$
   I del fyra fallen ger detta polerna
   $$(i)\ \ \lambda = -1, -1 \qquad (ii)\ \ \lambda = -1 \pm 2i$$
   $$(iii)\ \ \lambda = 1 \pm \sqrt{8} \qquad (iv)\ \ \lambda = -5, -1$$
   I fall (iii) ligger en av polerna i höger halvplan, d v s systemet är instabilt. Detta fall hör ihop med B. I fall (ii) är polerna komplexa, d v s systemet är oscillativt. Detta hör ihop med C. I fall (iv) är en pol mycket snabbare vilket rimligen kan kopplas med A där vi ser två kraftigt skiljande responstider på de två tillstånden. Detta ger slutligen (i) – D.

(b) Med den givna återkopplingen fås det återkopplade systemets poler som nollställena till den karaktäristiska ekvationen

$$\det\big(Is-(A-BL)\big) = \det\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -2+l_1 & s-1+l_2 \end{pmatrix} = (s+1)(s-1+l_2).$$

Den stabila polen i -1 kan inte flyttas alltså kan inte polerna placeras godtyckligt (ej styrbart), men den andra polen kan placeras godtyckligt med l_2 och det återkopplade systemet går alltså att få stabilt.

4. (a) Stabilitetsgränsen är när förstärkningen är 1 då fasen är $-180°$. Alternativt uttryck, den maximala skärfrekvensen fås när skärfrekvensen och fasskärfrekvensen sammanfaller, det vill säga då $\omega_c = \omega_p$. Detta samband gäller redan i det öppna systemet i Bodediagrammet där $\omega_c = \omega_p \approx 1.7\,\mathrm{rad/s}$. P-regulatorn har alltså förstärkning strax under 1 när det slutna systemet har så hög skärfrekvens som möjligt.

(b) Regulatorsyntesproblemet kan lösas med lead-lag-design. Vid $\omega_{c,d} = 5$ ger avläsning i bodediagrammet att $\arg(G(i5)) \approx -205°$. Den nödvändiga fasavanceringen är alltså $25° + 20° + 6° = 51°$ (vi misstänker att en lag-länk kommer att behövas och kompenserar redan nu för dess negative fasbidrag). Figur 5.13 i Glad-Ljung ger $\beta = 0.13$ och vi väljer $\tau_D = 1/(\omega_{c,d}\sqrt{\beta}) \approx 0.55$. Förstärkningen K i lead-länken ska väljas så att skärfrekvensen blir den önskade. Med valet av τ_D ovan och med $|G(i5)| \approx -23\,\mathrm{dB} = 10^{-23/20} \approx 0.071$ avläst i bodediagrammet får man

$$|F_{lead}(i5)G(i5)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}0.071 = 1 \quad\Rightarrow\quad K \approx 5.1$$

Om $F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s)$ så ges det stationära reglerfelet när referenssignalen är ett steg av amplitud 10 av

$$\lim_{s\leftarrow 0} s\frac{1}{1+F_{lead}(s)F_{lag}(s)G(s)}\frac{10}{s} = \frac{10}{1+5.1\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot 2} \le 0.2 \quad\Rightarrow\quad \gamma \le \frac{10.2 * 0.2}{9.8} \approx 0.21$$

Genom välja γ så stort som möjligt undviker man onödigt hög förstärkning vid låga frekvenser. Parametern τ_I väljs till $\tau_I = 10/\omega_{c,d} = 2$ enligt tumregel. Den resulterande regulatorn är

$$F(s) = 5.1\frac{0.55s+1}{0.13\cdot 0.55s+1}\cdot\frac{2s+1}{2s+0.21}$$

5. (a) Eftersom vi mäter x_1 så gäller det att $C = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$. Observatören ges av $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t)+Bu(t)+K(y(t)-C\hat{x}(t))$ och vi skall således placera polerna till $A-KC$. Polerna ges av egenvärdena, som ges av $\det(\lambda I-(A-KC)) = 0$

$$\lambda I-(A-KC) = \begin{pmatrix}\lambda & 0 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}-1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}k_1 \\ k_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\lambda+k_1 & -1 \\ k_2 & -1+\lambda\end{pmatrix}\right)$$

Vi vill ha poler/egenvärden i -5 och har därför ett önskat polpolynom $(\lambda+5)^2 = \lambda^2+10\lambda+25$. Vårt polynom blir $(1+\lambda+k_1)(\lambda-1)+k_2 = \lambda^2+k_1\lambda+k_2-k_1-1$. Identifiering ger $k_1 = 10$ och $k_2 = 36$.

(b) $y = \alpha + x_1$ där α är konstant men okänd. Utöka tillståndsvektorn med $x_3 = \alpha \Rightarrow \dot{x}_3 = 0$. Detta ger en utökad tillståndsmodell med

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}0 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Systemet är observerbart då observerbarhetsmatrisen ges av

$$\begin{pmatrix}C \\ CA \\ CA^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

och dess determinant är -1 (ses även enkelt att alla kolumner är linjärt oberoende). Detta betyder att alla tillstånd kan skattas och man kan och placera egenvärdena till $A-KC$ godtyckligt. Observatören ges som vanligt av

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x}+Bu+K(y-C\hat{x})$$