Lösningar till tentamen i TSRT03/19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2018-04-03

1. (a) Genom att jämföra nämnaren i respektive överföringsfunktion med uttrycket

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

ser man att den relativa dämpningen är $\zeta = 0.5$ för båda systemen och att $\omega_0 = 2$ för $G_1(s)$ samt $\omega_0 = 4$ för $G_2(s)$. Vid samma relativa dämpning hos polerna avgörs stigtiden av polernas avstånd till origo (ω_0), vilken medför att $G_2(s)$ har kortast stigtid.

(b) Då insignalen till ett linjärt system $G(s)$ utgörs av en sinus kommer även utsignalen i stationärt tillstånd att utgöras av en sinus, dock påverkad av systemet enligt,

$$y(t) = A|G(i\omega)|\sin(\omega t + \arg G(i\omega))$$

Enligt förutsättningarna har vi $\omega = 3, A = 4, |G(3i)| = 2/5, \arg G(3i) = -\arctan(3/4)$. Således blir utsignalen

$$y(t) = \frac{8}{5}\sin(3t - \arctan(3/4)).$$

(c) Observerbarhetsmatrisen ges av

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$$

vilket innebär att $\det \mathcal{O} = \alpha(1-\alpha)$. Styrbarhetsmatrisen ges av

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

vilket innebär att $\det \mathcal{S} = 1 - \alpha$. Sammantaget innebär detta att systemet är styr- och observerbart då $\alpha \neq 0, 1$.

(d) Enligt förutsättningarna har vi att

$$Y(s) = G(s)F(s)(R(s) - Y(s)) + V(s) = -G(s)F(s)Y(s) + V(s)$$

vilket innebär att

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{1 + F(s)G(s)}}_{S(s)} V(s),$$

vilket i ord innebär att känslighetsfunktionen talar om hur en additiv störning, $v(t)$ påverkar utsignalen $y(t)$. Återkopplingen gör nytta för de vinkelfrekvenser där känslighetsfunktionenens absolutbelopp är mindre än ett, vilket, enligt figuren, gäller för $\omega < 2$ rad/s. Återkopplingen är sämst där förstärkningen från störning till utsignal är störst, vilket sker vid $\omega = 3$ rad/s.

2. (a) Eftersom det antas att det återkopplade systemet är stabilt kan det stationära reglerfelet destämmas m.h.a. slutvärdesteoremet enligt

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s).$$

Vidare har vi att $E(s) = R(s) - Y(s), Y(s) = F(s)G(s)E(s)$, vilket innebär att

$$E(s) = \frac{1}{1+F(s)G(s)}R(s),$$

där

$$F(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right).$$

Sammantaget ger detta att det stationära felet ges av

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1 + K\left(1+\frac{1}{T_I s}\right)\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}}\frac{A}{s^2} = \cdots = \frac{2AT_I}{K}$$

(b) Rotorten berättar för oss att då $K = 0$så har vi 4 startrötter som ges av $0, -1, -1$ och -2 (dvs vi har en dubbelrot i -1). Fallet $K = 0$ är naturligtvis inte intressant eftersom det betyder att regulatorn är avstängd, men för $K > 0$ men mycket liten så är vi i närheten av dessa rötter. Vi kan således förvänta oss ett väldigt långtsamt system då K är litet, eftersom vi har en rot väldigt nära origo. Då K ökar så kommer ett par rötter att direkt röra sig ut i komplexa talplanet, och vi kan kanske förvänta oss oscillativt beteende. Vi kan dock ej veta om detta blir problematiskt, eftersom vi har en rot som håller sig nära origo för alla val av K och således kan bli dominerande och dämpa oscillationer. För ökande K så kommer dock det komplexa paret bli kritiskt då det till slut rör sig in i högra halvplanet, och således blir instabila, vilket betyder att det slutna systemet är garanterat att bli instabilt för tillräckligt stort K.

(c) Ett stort värde på K ger ett litet stationärt fel, men det ger också ett oscillativt (och för stora K instabilt) återkopplat system.

3. (a) För $F(s) = 1$ är skärfrekvensen ca 0.45 rad/s och fasmarginalen ca 60°. Kraven på halverad stigtid med bibehållen dämpning innebär att $F(s)$ ska bestämmas så att den nya skärfrekevensen blir $\omega_{c,d} = 0.9$ rad/s och att fasmarginalen vid $\omega_{c,d}$ blir 60°.

Vid $\omega = 0.9$ är $\arg G(i0.9) \approx -175°$. Med hänsyn till en eventuell lag-kompensering innebär detta att det behövs en fasökning på ca 60°, vilket enligt Figur 5.13 i boken innebär att $\beta = 0.05$. Detta medför därmed att $\tau_D \approx 5$. Vid $\omega = 0.9$ är $\mid G(i0.9) \mid \approx 0.6$ och för att den nya skärfrekvensen ska placeras rätt väljs förstärkningen K så att

$$\mid F_{lead}(i\omega_{c,d})G(i\omega_{c,d}) \mid = 1 \Rightarrow \mid \frac{K}{\sqrt{\beta}} G(i\omega_{c,d}) \mid = 1 \Rightarrow K = \sqrt{0.05}/0.6 = 0.37$$

Därefter kontrolleras e_1, d v s det stationära felet vid en enhetsramp, vilket ges av

$$e_1 = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG_0(s)} = \frac{1}{F_{lead}(0)\lim_{s\to 0} sG(s)} \approx \frac{1}{0.37 \cdot 1 \cdot 0.4} = 6.75$$

där $\lim_{s\to 0} sG(s) = k = 0.4$. Kravet $|e_1| < 0.01$ är ej uppfyllt, vilket gör att vi måste ha en laglänk,

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

Felet blir då

$$e_1 = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG_0(s)} = \frac{1}{F_{lead}(0)F_{lag}(0)\lim_{s\to 0} sG(s)} \approx \frac{1}{0.37 \cdot (1/\gamma) \cdot 0.4} = 6.75\gamma$$

Vi måste således ha $6.75\gamma < 0.01$. Eftersom det inte finns några begränsningar för valet av γ väljs $\gamma = 0$, och τ_I väljs enligt tumregel till $\tau_I = 10/0.9 = 11.1$. Detta ger totala överföringsfunktionen för återkopplingen:

Svar:

$$F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s) = 0.37\frac{5 \cdot s + 1}{5 \cdot 0.05 \cdot s + 1}\frac{11.1 \cdot s + 1}{11.1 \cdot s}$$

(b) Känslighetsfunktionen ges av

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} \quad \Rightarrow \quad |S(i\omega)| = \left|\frac{1}{1 + G_0(i\omega)}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1 + \Re(G_0(i\omega)))^2 + (\Im(G_0(i\omega)))^2}}$$

Kretsförstärkningen $G_0(i\omega)$ för $\omega = 0.1$ rad/s ges av

$$G_0(i0.1) = F(i0.1)G(i0.1) = (0.53 - 0.16i) \cdot 4e^{-i1.66} = -0.83 - 2.06i$$

där uttrycket för $F(i0.1)$ fås genom insättning av $s = i0.1$ i regulatorn från a) och $G(i0.1) = 4e^{-i95\cdot\pi/180} = 4e^{-i1.66} = (-0.35 - 3.98i)$ fås ur figur (eller så räknar man ut via givna överföringsfunktionen)

Insättning i uttrycket för $|S(i\omega)|$ ovan ger slutligen

$$|S(i0.1)| = \frac{1}{|1 + (-0.83 - 2.07i)|} \approx 0.48$$

Svar: $|S(i0.1)| = 0.48$

4. (a) Enligt blockschemat har vi att

$$
\begin{aligned}
P(s) &= \frac{1}{cs}\left(K_q U(s) - K_c P(s) - aY(s)\right), \\
Y(s) &= \frac{1}{ms}\left(aP(s) - bY(s)\right),
\end{aligned}
$$

vilket kan skrivas

$$
\begin{aligned}
sP(s) &= \frac{1}{c}\left(K_q U(s) - K_c P(s) - aY(s)\right), \\
sY(s) &= \frac{1}{m}\left(aP(s) - bY(s)\right).
\end{aligned}
$$

Vi kan nu inverstransformera detta

$$
\begin{aligned}
\dot{p}(t) &= \frac{K_q}{c}u(t) - \frac{K_c}{c}p(t) - \frac{a}{c}y(t), \\
\dot{y}(t) &= \frac{a}{m}p(t) - \frac{b}{m}y(t),
\end{aligned}
$$

vilket kan skrivas

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\frac{b}{m}x_1(t) + \frac{a}{m}x_2(t), \\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{a}{c}x_1(t) - \frac{K_c}{c}x_2(t) + \frac{K_q}{c}u(t).
\end{aligned}
$$

(b) Om samtliga konstanter sätts till ett får följande modell

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u, \\
y &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} x.
\end{aligned}
$$

Det slutna systemet ges av

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= (A - BL)x + Br, \\
y &= Cx.
\end{aligned}
$$

Det slutna systemets poler ges av egenvärdena till

$$
A - BL = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 - l_1 & -1 - l_2 \end{pmatrix},
$$

d.v.s. av

$$
\det(\lambda I - (A - BL)) = \lambda^2 + (2 + l_2)\lambda + 2 + l_1 + l_2.
$$

Enligt förutsättningarna ska systemets poler ligga i $-2+2i$ och $-2-2i$, vilket leder till följande karakteristiska ekvation

$$
(\lambda + 2 + 2i)(\lambda + 2 - 2i) = \lambda^2 + 4\lambda + 8.
$$

Identifikation leder nu till att $l_1 = 4, l_2 = 2$, d.v.s. återkopplingen ges av

$$
u(t) = -4x_1(t) - 2x_2(t) + r(t) = -\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}}_{L} x(t) + r(t)
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= (A - BL)x + Br, \\
y &= Cx.
\end{aligned}
$$

Laplacetransformera nu detta,

$$\begin{aligned} sX(s) &= (A - BL)X(s) + BR(s), \\ Y(s) &= CX(s). \end{aligned}$$

Detta kan nu skrivas

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - (A - BL))^{-1}BR(s), \\ Y(s) &= CX(s). \end{aligned}$$

Sätter vi nu in den övre ekvationen i den undre får vi

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - (A - BL))^{-1}B}_{G(s)}R(s)$$

Detta innebär att

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 8}.$$

5. (a) Antagandet att det verkliga systemet ges av

$$G^0(s) = G(s)(1+\alpha)$$

innebär att det relativa modellfelet är

$$\Delta G(s) = \alpha$$

Eftersom $\mid \alpha \mid < 0.5$ ger robusthetskravet att $F(s)$ måste konstrueras så

$$\mid G_c(i\omega) \mid < 2$$

(b) Amplitudmarginalen definieras vid den vinkelfrekvens ω_p då

$$\arg G_0(i\omega_p) = \arg F(i\omega_p)G(i\omega_p) = -180^\circ$$

d v s $G_0(i\omega_p)$ är ett reellt negativt tal. Det kan därmed skrivas $G_0(i\omega_p) = -\beta$ där $\beta > 0$. Robusthetskravet ger nu

$$\mid G_c(i\omega_p) \mid = \frac{\mid G_0(i\omega_p) \mid}{\mid 1 + G_0(i\omega_p) \mid} = \frac{\beta}{1-\beta} < 2$$

Detta ger kravet $\beta = \mid G_0(i\omega_p) \mid < 2/3$, vilket ger $A_m > 1.5$.

(c) Fasmarginalen definieras vid den vinkelfrekvens ω_c då

$$\mid G_0(i\omega_c) = \mid F(i\omega_c)G(i\omega_c) \mid = 1$$

d v s $G_0(i\omega_c)$ är ett komplext tal med absolutbelopp ett, och kan därmed skrivas $G_0(i\omega_c) = e^{i\phi}$. Robusthetskravet ger nu

$$\mid G_c(i\omega_c) \mid = \frac{\mid G_0(i\omega_c) \mid}{\mid 1 + G_0(i\omega_c) \mid} = \frac{1}{\mid 1 + e^{i\phi} \mid} < 2$$

Genom att utnyttja sambandet $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ fås kravet

$$\frac{1}{\mid 1 + \cos\phi + i\sin\phi \mid} = \frac{1}{\sqrt{2 + 2\cos\phi}} < 2$$

d v s

$$1/2 < \sqrt{2 + \cos\phi}$$

vilket ger

$$\cos\phi > -7/8$$

d v s

$$\phi > \arccos(7/8) - \pi$$

Fasmarginalen ges av $\phi_m = \phi - (-\pi)$ vilket ger $\phi_m > \arccos(7/8)$.