Lösningar till tentamen i TSRT19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2017-05-30

Johan Löfberg

1. (a) Den mätta syrehalten kan ses som en utsignal y från systemet och signalen till pumpen kan ses som en insignal u. Om den önskade syrehalten betecknas med r kan man låta pumpsignalen bero på reglerfelet $r - y$, det vill säga genom att återkoppla y. Genom att välja en lämplig återkoppling kan man på så sätt få ett system där pumpen bara körs så mycket som behövs för att syresättningen ska bli den önskade, vilket rimligen borde vara effektivare än att köra den för fullt hela tiden.

   (b) En mycket dålig affär. Mikrofonen är beskriven som ett lågpassfilter med en bandbredd på 2π rad/s (1Hz), dvs förstärkningen är omkring 1 upp till bandbredden (där den är $1/\sqrt{2}$) och sedan faller förstärkningen av snabbt. Ljud signifikant över 1Hz (t.ex 10Hz och uppåt) skulle sålunda filtreras bort nästan helt, dvs allt ljud som det mänskliga örat kan uppfatta skulle försvinna.

   (c) Nollställepolynomet har 4 nollställen och är således ett polynom av gradtal 4. Polpolynomet har 6 poler och är ett polynom av gradtal 6. Valfri kanonisk form (styrbar/observerbar) kan t.ex användas för att skriva modellen i tillståndsform, och den modellen skulle behöva 6 tillstånd.

   (d) Vi skriver i formen $F_1(s) = 2 + \frac{3}{s} + s$ och $F_2(s) = 1 + \frac{1}{s} + \frac{10}{s^2}$ och drar slutsatsen att $F_1(s)$ är en PID-regulator i standardform. $F_2(s)$ är dock ej en PID-regulator (den implementerar en dubbelintegrator av något slag, och har ej någon D-del).

   (e) Fördelen med polplacering är att det är enkelt att skapa precis den dynamik man vill. En nackdel med tillståndsreglering baserat på polplacering är att det krävs en modell för att kunna räkna ut en regulator. Dessutom så krävs mätning av en massa tillstånd, eller alternativt utveckling av en passande observatör. En fördel med PID är att man inte behöver en modell utan kan ganska intuitivt förstå hur de tre parametrarna skall justeras, när man ser stegsvar etc. En nackdel är att det är inte trivialt att förstå i mer komplexa system hur de tre parametrarna gemensamt påverkar polernas placering, dvs det finns ingen självklar metodik för att att matematisk justera designen.

2. (a)
   - I-del medför att reglerfelet försvinner. Enligt figuren går $y(t)$ mot 1 för A och D, d v s de hör samman med regulator 2 och 3.
   - Större K_I medför att felet försvinner snabbare, men kan samtidigt göra systemet (mer) oscillativt. D oscillerar mer än A, vilket ger kombinationerna A-2 och D-3.
   - Återstår nu att kombinera B och C med 1 och 4. Större K_P gör systemet snabbare och minskar reglerfelet. Enligt figuren har stegsvaret i B både längre stigtid och större reglerfel än stegsvaret i C. Det ger därför kombinationerna B-1 och C-4.

   Svar: A-2, B-1, C-4 samt D-3

   (b) PI-reglering enligt uppgift a) ger

$$F(s) = K_P + K_I \frac{1}{s}$$

   och det slutna systemet ges av

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{(K_P + K_I \frac{1}{s})\frac{10}{3s+1}}{1 + (K_P + K_I \frac{1}{s})\frac{10}{3s+1}} = \\ &= \frac{(sK_P + K_I)10}{(3s+1)s + (sK_P + K_I)10} = \frac{\frac{10}{3}(sK_P + K_I)}{s^2 + \frac{1}{3}(1 + 10K_P)s + \frac{10}{3}K_I} \end{aligned}$$

   Karaktäristiska ekvationen blir då

   Svar:

$$s^2 + \frac{1}{3}(1 + 10K_P)s + \frac{10}{3}K_I = 0$$

   (c) Jämför karaktäristiska ekvationen med standardformen

$$s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

där ξ är relativa dämpningen och ω_0 är avståndet från origo till polerna. Det ger ekvationerna

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{\frac{10}{3}K_I} \\ 2\xi\omega_0 &= \frac{1}{3}(1+10K_P)\end{aligned}$$

Enligt uppgift ska $\omega_0 \geq 2$ och $\xi = 0.7$ vilket ger lösningen
Svar:

$$\begin{aligned}K_I &\geq 1.2 \\ K_P &= 0.42\sqrt{\frac{10}{3}K_I} - 0.1\end{aligned}$$

3. (a) Det kompenserade systemet har en skärfrekvens på 2rad/s och en fasmarginal på 40°, vilket om regulatorn är korrekt konstruerad är de specifikationer på önskad skärfrekvens och fasmarginal som gjorts. Det kompenserade systemet ser dessutom ut att ha en oändlig lågfrekvensförstärkning (till skillnad från ursprungliga systemet som har en lågfrekvensförstärkning på 20dB = 10). Fasen går dessutom mot $-90°$ vilket indikerar att det finns en ren integrator i kompenserade sytemet. Man har således sannolikt ställt kravet att man skall kunna följa konstanta referenssignaler utan något kvarvarande fel.

   (b) Det okompenserade systemet har ganska låg statisk förstärkning (10) samtidigt som vi har krav på ett statiskt reglerfel vid referensföljning. Det gör att vi redan nu kan misstänka att vi kommer behöva använda en lag-del i regulatorn.

   Vid den önskade skärfrekvensen har vi nu fas $-190°$ och förstärkning $10^{2/20} = 1.25$. Önskad fasmarginal 30° gör att vi måste fasavancera 40°. Vi har dessutom en lag-del och avancerar 6° extra för att kompensera för dess fasförluster. Ett val av $\beta = 0.16$ är rimligt. För att placera maximal fasavancering vid önskad skärfrekvens väljer vi $\tau_D = \frac{1}{3\cdot\sqrt{0.16}} = 0.83$.

   I önskad skärfrekvens skall kretsförstärkningen $F_{lead}(s)G(s)$ ha amplitudförstärkning 1. Leadlänken har där amplitudförstärkning $K/\sqrt{0.16}$ och ursprungliga systemet amplitudförstärkning 1.25 vilket leder till $K = \frac{\sqrt{0.16}}{1.25} = 0.32$.

   Reglerfel vid följning av en konstant referens med amplitud c ges enligt slutvärdesteoremet av $\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+F_{lag}(s)F_{lead}(s)G(s)}\frac{c}{s} = \frac{1}{1+\frac{1}{\gamma}\cdot K\cdot 10}c$. Detta skall (i absolutbelopp) vara mindre än $0.01|c|$, dvs $1 + \frac{K}{\gamma}\cdot 10 \geq 100$ vilket leder till $\gamma \leq 0.32 \cdot 10/99 = 0.03$. Eftersom inget annat sagts så kan man välja $\gamma = 0$, men då måste det bevisats att det är ett fungerande val.

4. (a) I rotorten så ser vi ett system som har tre poler initial då $\alpha = 0$. Av dessa är två reella instabila poler, och en är en stabil reell pol. Då α ökar så rör sig den initialt stabila reella polen längs reella axeln, och lämnar aldrig denna eller vänstra halvplanet, och kommer för stora α till en slutpunkt i -2. De två initialt instabila polerna rör sig mot varandra, och kommer för något val av α att mötas, och då vandra ut i komplexa talplanet, och röra sig mot två slutpunkter, som är både komplexa och instabila.

   Slutsats: Systemet är instabilt för alla α (iv), har ett polpolynom av ordning 3 (vi), och får komplexa poler om α är tillräckligt stort (x).

   (b) Förstärkning från utsignalsstörning till reglerfel ges av känslighetsfunktionen, och förstärkning från mät fel ges av komplementära känslighetsfunktionen. I frekvensen 0.5 rad/s där vi har utsignalsstörningar ger de två regulatorerna upphov till samma prestanda, men den komplementära känslighetsfunktionen som fås med F_1 är klart bättre i de frekvensområden där vi har mätbrus, och sålunda väljer vi F_1.

   (c) Förstärkning från referenssignal till reglerfel ges av känslighetsfunktionen, och i det intressanta frekvensområdet ser vi att F_2 leder till en något lägre förstärkning, och således bör väljas. Alternativt så ser vi detta via den komplementära känslighetsfunktionen som beskriver sambandet från referens till utsignal, och där ser vi, naturligtvis, att den komplementära känslighetsfunktionen kopplad till F_1 är något närmare 1.

   (d) Enligt robusthetskriteriet så har vi att stabilitet bara kan garanteras om $|T(iw) < 1/\Delta(i\omega)$ i alla frekvenser, där $|\Delta(i\omega)|$ är det relativa modellfelet. Om vi har mycket modellfel i ett frekvensområde så måste $|T(iw)|$ vara liten där. Sålunda kan det bli problematiskt med T_1 som har en tendens till resonanstopp i det kritiska frekvensområdet, och vi väljer för säkerhets skull F_2.

5. (a) Med $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$ får vi $A - BL = \begin{bmatrix} -1-l_1 & 2-l_2 \\ 2-2l_1 & -1-2l_2 \end{bmatrix}$. Egenvärdena till denna matris ges av lösningarna till $det(\lambda I - (A-BL)) = 0$ dvs $det(\begin{bmatrix} \lambda+1+l_1 & -2+l_2 \\ -2+2l_1 & \lambda+1+2l_2 \end{bmatrix}) = 0$. Förenkling leder till $\lambda^2 + \lambda(2+l_1+2l_2) + (-3+5l_1+4l_2) = 0$. Detta jämförs med önskade polpolynomet $(s+2)^2 = s^2+4s+4$ och lösning av det uppkomna ekvationssystemet leder till $l_1 = 1, l_2 = 0.5$. Överföringsfunktionen för det slutna systemet ges av $C(sI-(A-BL))^{-1}Bl_0$ vilken har statisk förstärkning $-C(A-BL)^{-1}Bl_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} l_0 = \frac{5}{4} l_0$. För att undvika stationärt reglerfel vid konstant referenssignal krävs att statiska förstärkningen är ett, således väljs $l_0 = \frac{4}{5}$.

(b) Stabilitet (som avgör om skattningsfelet går mot noll) hos observatör avgörs av egenvärdena till skattningsfelens dynamik, $A - KC$, där C är den matris som beskriver vilka mätvärden som används. I nuläget vet vi inte om vi mäter $x_1(t)$ (motsvarande $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$) eller $x_2(t)$ (motsvarande $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$). Med $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ ges observatörsdynamiken för dessa båda fall av

$$
\begin{aligned}
A - KC_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-k_1 & 2 \\ 2-k_2 & -1 \end{bmatrix} \\
A - KC_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2-k_1 \\ 2 & -1-k_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Egenvärdena för de två fallen ges av lösningarna till

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 + \lambda(2+k_1) + (-3+k_1+2k_2) = 0 \\
\lambda^2 + \lambda(2+k_2) + (-3+2k_1+k_2) = 0
\end{aligned}
$$

Lösningarna till en andragradsekvation $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ har stabila rötter om och endast om a och b är positiva. Om vi väljer en k_1 och k_2 så att $2+k_1 > 0$, $2+k_2 > 0$, $-3+k_1+2k_2 > 0$ samt $-3+2k_1+2k_1 > 0$ så är båda uppställningarna stabila och observatören fungerar oavset vad vi kommer att mäta! (t.ex $k_1 = k_2 = 5$).