Lösningar till tentamen i Reglerteknik

Tentamensdatum: 2017-04-18

1. (a) Om mjölken blir för varm kokar den över. Det är rimlig att anta att temperaturen bör mätas, dvs $y(t)$=uppmätt temperatur i mjölken. Referenssignalen $r(t)$ bör vara en önskad temperatur som lämpligen är mjölkens koktemperatur, insignalen eller styrsignalen $u(t)$ är värmetillförseln, typiskt effekt tillförd spisplattan. Vi bör alltså bygga en apparat som kontinuerligt mäter skillnaden mellan konstanten $r(t)$ och mjölktemperaturen $y(t)$, och baserat på det beräknar hur mycket effekt som skall tillföras spisplattan. Enklast möjligt är en P-regulator $u(t) = K(r(t) - y(t))$. Överslängen får inte överskrida den kritiska temperaturen då mjölken kokar över, stationära felet kan avvika något från önskat värde, men om det är positivt får det inte överskrida den kritiska överkokningstemperaturen och det får naturligtvis inte vara så så stort (åt andra hållet) att mjölken inte kokar.

   (b) Modellens överföringsfunktion är
   $$Y(s) = \frac{1}{s^2 + s + k} U(s)$$
   jämför med andra ordningens standard uttryck
   $$Y(s) = K \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} U(s)$$
   och identifiera statiska förstärkningen $K = 0.2$ i bilden. Det ger $\omega_0^2 = 1/K = k = 5$. Alternativt, statiskt så gäller att $ky(t) = u(t)$ vilket med $u(t) = 1$ ger att $k = 5$. Lågförstärkningssatsen kan också användas, och ger naturligtvis samma resultat.

   (c) Systemen B och C har en pol i origo (lågfrekvensasymptotlutning -1 och fas -90^o), det ger att det slutna systemet har statisk förstärkning 1, jämför systemen 1 och 2. System C har lägre fasmarginal än B, vilket ger upphov till en resonanstopp som i plot 1, dvs 1C och 2B. System D har låg fasmarginal vilket ger stor resonanstopp, dvs 4D och 3A.

   (d) Insignalen har frekvensen ω=1. Sinus-in sinus-ut principen ger utsignalen
   $$y(t) = |G(i)| \sin(t + \arg G(i)).$$
   Vi får $|G(i)| = \left|\frac{1}{(1+i)^2}\right| = 1/2$ och $\arg G(i) = \arg \frac{1}{(1+i)^2} = 2 \arg \frac{1}{(1+i)} = -2 \arg(1 + i) = -\pi/2$.

2. (a) PD-regulatorn som används kan ses som en regulator med två frihetsgrader där $F_r = 1$ och $F_y = K_P + K_D s$. Överföringsfunktionen för det slutna systemet är således
   $$\frac{F_r(s)G(s)}{1 + F_y(s)G(s)}$$
   och den karakteristiska ekvationen blir alltså $s^2 + s(K_D + 1) + K_P = 0$.

   (b) För att få det slutna systemets poler i -1 skall den karakteristiska ekvationenska vara $(s+1)^2 = s^2 + 2s + 1 = 0$. Man skall således välja $K_D = 1$ och $K_P = 1$.

   (c) Det relativa modellfelet ges av
   $$\Delta G(s) = \frac{G_0(s) - G(s)}{G(s)} = \frac{\frac{\alpha}{s(s+1)} - \frac{1}{s(s+1)}}{\frac{1}{s(s+1)}} = -1 + \alpha$$
   Den komplementära känslighetsfunktionen ges av
   $$T(s) = \frac{F_y(s)G(s)}{1 + F_y(s)G(s)} = \frac{1}{s+1}$$
   Robusthetskriteriet säger att det sanna slutna systemet är stabilt om
   $$\|\Delta G(iw)\| < \frac{1}{\|T(iw)\|} \forall w$$
   eftersom $\frac{1}{\|T(iw)\|} \geq 1$ blir stabilitet villkoret
   $$\|\Delta G(iw)\| < 1$$
   vilket betyder att det sanna systemet är stabilt enligt robusthetskriteriet när $0 < \alpha < 2$.

(d) Den karaktäristiska ekvationen för det sanna slutna systemet är

$$s^2 + s(\alpha + 1) + \alpha = 0$$

Det sanna slutna systemet är stabilt om dess poler har negativa real del, vilket de har om $\alpha > 0$.

3. (a) En lag-regulator kan ej förbättra fasen utan sänker den i alla frekvenser (se exempelvis figur 5.15 och ekvation 5.10). I bästa möjliga gränsfallet då $\gamma \to 1$ så kan man få en fasförlust som blir nästan 0. Det högsta vi kan sikta på någonsin är således (precis under) 10 rad/s, eftersom vi redan nu har fasen $-180°$ där.

(b) Vi designar en lead-lag-regulator. Lead-länken har utseendet

$$F(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}$$

För att få fasmarginalen 40^o vid önskad skärfrekvens $\omega_c = 10$ rad/s ser vi ur Bodediagrammet att en fasökning på $40°$ behövs. Vi misstänker att vi kommer lägga på en lag-länk, och behöver således kompensera extra, säg $45°$ totalt. Att detta uppfylls för $\beta = 0.17$ ges av figur 5.13 i boken. Parametern τ_D i lead-länken fås ur eqkvation (5.5) i boken

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{10\sqrt{1.7}} \approx 0.24.$$

Konstanten K bestäms ur villkoret

$$|G_o(i\omega_c)| = |F(i\omega_c)||G(i\omega_c)| = 1$$

vid önskad skärfrekvens. $|G(i10)| = 0.2$ (eller avläs approximativt ur Bodediagrammet). $|F(i10)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}$ enligt boken. Detta ger $K \approx 2.06$.

För att kunna följa en ramp utan reglerfel, dvs att felkoefficienten e_1 skall vara noll, så krävs $\lim_{s\to 0}\frac{1}{sG_o(s)} = 0$ enligt sid 62 i boken (eller manuell beräkning med slutvärdesteoremet. För att erhålla detta krävs två integratorer i kretsförstärkningen. Öppna systemet har redan en, och den andra får vi genom $\gamma = 0$ så att lag-delen har en ren integration. Slutligen väljs enligt tumregel $\tau_I = 10/10$.

4. (a) Eftersom tillståndsbeskrivningen är minimal ges systemets poler av A-matrisens egenvärden, $0 = det(sI - A) = s^2 - 10 \Rightarrow s = \pm\sqrt{10}$

(b) Med $L = [l_1\ l_2]$ ges den karakteristiska ekvationen av $0 = det(sI - A + \alpha BL) = det\begin{pmatrix} s & -1 \\ -10 + \alpha l_1 & s + \alpha l_2 \end{pmatrix}$ $= s^2 + \alpha l_2 s - 10 + \alpha l_1$.

(c) Med $\alpha = 1$ fås karakteristiska ekvationen $0 = s^2 + l_2 s - 10 + l_1$ som för poler i -1 önskas vara $0 = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$. Identifiering ger $L = [11\ 2]$.

(d) Det återkopplade systemet är asymptotiskt stabilt omm dess poler, givna av karakteristiska ekvationen ($0 = s^2 + \alpha l_2 s - 10 + \alpha l1$), ligger i vhp. För ett andra ordningens polynoam är detta ekvivalent med att alla koefficienter är positiva. Vi får således kravet att $-10 + \alpha l1 > 0$. För den valda återkopplingen erhålls alltså stabilitet så länge som $\alpha > 10/11$.

5. (a) Vi har $Y(s) = \frac{1}{s}Y_a(s) = \frac{1}{s}G_1(s)(U(s) - \alpha Y_a(s))$. Med $U(s) = K(R(s) - Y(s))$ och $Y_A(s) = sY(s)$ får vi $Y(s) = \frac{1}{s}G_1(s)(K(R(s) - Y(s)) - \alpha sY(s))$. Vi bryter ut $Y(s)$ och får

$$Y(s) = \frac{G_1(s)K}{s(1 + G_1(s)\alpha) + G_1(s)K}R(s) = \frac{K}{s^3 + s^2 + \alpha s + K}R(s)$$

(b) För små α är slutna systemet instabilt (startpunkter i HHP). För ett visst α passeras imaginära axeln (mex komplexa poler) och slutna systemet blir sedan stabilt. För ökande α blir kvarstår två komplexa poler, men den reella polen rör sig närmare origo och blir dominerande långsam och dämpande. $0.1 - 3$ (instabilt), $1 - 1$ (marginellt stabilt, självsvängning), $2 - 2$ (oscillativt men stabilt), $10 - 4$ (långsamt, dominerat av reell pol).

(c) Styrsignalen som går in i $G_s(s)$ ges av $U(s) = K(R(s) - Y(s)) - \alpha Y_a(s)$. Ur schemat har vi $Y_A(s) = sY(s)$. Vi har alltså $U(s) = K(R(s) - Y(s)) - \alpha sY(s)$. Uppsamling av termer i önskad form ger $U(s) = KR(s) - (K + \alpha s)Y(s)$. Uppställningen är alltså ett sätt att implementera en PD-liknande regulator där man inte deriverar referenssignalen. Samma regulatortyp användes i uppgift 2.

(d) Från blockschemat har vi $Y(s) = \frac{1}{s} Y_a(s)$ och $Y_a(s) = \frac{1}{s(s+1)} U(s)$. Låt $X_1(s) = Y(s), X_2(s) = Y_a(s)$ och $X_3(s) = \frac{1}{(s+1)} U(s)$ och vi har $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$ och $\dot{x}_3 + x_3 = u$. Insättning av styrlag ger $\dot{x}_3 + x_3 = K(r - x_1) - \alpha x_2$. Sammanställning i matrisform ger

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K & -\alpha & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} r \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x
\end{aligned}
$$