Lösningsförslag till tentamen i TSRT19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2016-10-22

Svante Gunnarsson

1. (a) Ett steg med amplitud 2 som insignal $u(t)$ ger Laplace transformen $U(s) = 2/s$. Utsignalen från ventilen blir då

$$Q_V(s) = \frac{k_V}{s\tau_V + 1}U(s) = \frac{k_V}{(s\tau_V + 1)}\frac{2}{s}$$

Partialbråksuppdelning ger

$$Q_V(s) = \frac{2k_V}{s} - \frac{2k_V\tau_V}{s\tau_V + 1} = 2k_V(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_V}})$$

och ur tabell fås då att

$$q_V(t) = 2k_V(1 - e^{-t/\tau_V})$$

Slutvärdet blir $\lim_{t\to\infty} q_V(t) = 2k_V$. Från figur 1 fås då $2k_V = 4$, d v s $k_V = 2$. Vid tiden $t = \tau_V$ blir $q_V(\tau_V) = 2k_V(1 - e^{-1}) \approx 2.5$. Detta inträffar enligt figuren vid $t = 0.5$, d v s $\tau_V = 0.5$.

Svar: $k_V = 2$ och $\tau_V = 0.5$

(b) Överföringsfunktionen från flöde q_D till nivån y i dammen ges av

$$G_D(s) = \frac{k_D}{s\tau_D + 1}$$

Då insignalen är en sinussignal med vinkelfrekvens ω och amplitud A ges utsignalen av

$$y(t) =\mid G_D(i\omega) \mid A\sin(\omega t + \arg G_D(i\omega))$$

Figur 2 ger $A = 1$ och en periodtid (mäter med linjal) på $T = 49/47 \cdot 6 \approx 6.26$. Frekvensen ω ges då av $\omega = 2\pi/T \approx 1.0$. Amplituden hos y blir därför

$$\mid G(i1.0) \mid = \frac{k_D}{\sqrt{(1.0\tau_D)^2 + 1^2}}$$

och fasvridningen

$$\arg G(i1.0) = -\arctan(\frac{1.0\tau_D}{1})$$

Från figur fås amplitud $16/37 \cdot 1 \approx 0.43$ och fasändring $-8.5/49 \cdot 2\pi \approx -1.09$ (rad). Vilket insatt ovan ger

$$\tau_D = \tan(1.09) \approx 1.9$$

och

$$k_D =\mid G(i1.0) \mid \sqrt{(1.0\tau_D)^2 + 1^2} = 0.43\sqrt{(1.0 \cdot 1.9)^2 + 1} \approx 0.92$$

Svar: $k_D = 0.92$ och $\tau_D = 1.9$

(c) Från blockdiagrammet fås för dammen

$$Y(s) = \frac{k_D}{s\tau_D + 1}Q(s)$$

vilket kan skrivas om enligt

$$(s\tau_D + 1)Y(s) = k_DQ(s)$$

d v s

$$sY(s) = -\frac{1}{\tau_D}Y(s) + \frac{k_D}{\tau_D}Q(s)$$

Inverstransformering ger

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{\tau_D}y(t) + \frac{k_D}{\tau_D}q(t)$$

På samma sätt fås för ventilen

$$\dot{q}(t) = -\frac{1}{\tau_V}q(t) + \frac{k_V}{\tau_V}u(t)$$

Införs tillstånden $x_1 = y$ och $x_2 = q$ fås direkt

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{\tau_D} x_1 + \frac{k_D}{\tau_D} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{\tau_V} x_2 + \frac{k_V}{\tau_V} u$$

Tillsammans med $y = x_1$ är detta exakt det system som skulle verifieras.

2. (a)
   - I-del medför att reglerfelet försvinner. Enligt figur 3 går $y(t)$ mot 1 för A och D, d v s de hör samman med regulator 2 och 3.
   - Större K_I medför att felet försvinner snabbare, men kan samtidigt göra systemet (mer) oscillativt. D oscillerar mer än A, vilket ger kombinationerna A-2 och D-3.
   - Återstår nu att kombinera B och C med 1 och 4. Större K_P gör systemet snabbare och minskar reglerfelet. Enligt figuren har stegsvaret i B både längre stigtid och större reglerfel än stegsvaret i C. Det ger därför kombinationerna B-1 och C-4.

   Svar: A-2, B-1, C-4 samt D-3

   (b) PI-reglering enligt uppgift a) ger

$$F(s) = K_P + K_I \frac{1}{s}$$

   och det slutna systemet ges av

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{(K_P + K_I \frac{1}{s}) \frac{10}{3s+1}}{1 + (K_P + K_I \frac{1}{s}) \frac{10}{3s+1}} = \\ &= \frac{(sK_P + K_I)10}{(3s+1)s + (sK_P + K_I)10} = \frac{\frac{10}{3}(sK_P + K_I)}{s^2 + \frac{1}{3}(1 + 10K_P)s + \frac{10}{3}K_I} \end{aligned}$$

   Karaktäristiska ekvationen blir då
   Svar:

$$s^2 + \frac{1}{3}(1 + 10K_P)s + \frac{10}{3}K_I = 0$$

   (c) Jämför karaktäristiska ekvationen med standardformen

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

   där ζ är relativa dämpningen och ω_0 är avståndet från origo till polerna.
   Enligt uppgift önskas $\omega_0 = 2$ och $\zeta = 0.7$ vilket ger ekvationen

$$s^2 + 2 \cdot 0.7 \cdot 2s + 4 = 0$$

   vilket ger $K_I = 1.2$ och $K_P = 0.74$. **Svar:** $K_I = 1.2$ och $K_P = 0.74$.

3. (a) Med insignal $u(t) = A\sin(\omega t)$ ges utsignalen generellt av sambandet

$$y(t) =\mid G(i\omega) \mid A\sin(\omega t + \arg G(i\omega))$$

Här är frekvensen $\omega = 1$ och amplituden $A = 1$. Ur bodediagrammet fås $\mid G(i1) \mid\approx 2.2$ och $\arg G(i1) \approx -\frac{115}{180}\pi \approx -2.0$ (rad) vilket ger utsignalen

Svar:

$$y(t) = 2.2\sin(t - 2.0)$$

(b) Beräknar en lead-lag regulator som uppfyller kraven. Vid den önskade skärfrekvensen $\omega_{c,d} = 2$ är $\arg G(i\omega_{c,d}) \approx -144°$. En önskad fasmarginal på 60° medför att kompenseringen måste fasavancera $60° - 36° + 6° = 30°$ med hänsyn tagen till en tillkommande lag-länk. Denna fasavancering fås med $\beta = 0.3$. Vidare fås $\tau_D = 1/(\sqrt{0.3}\cdot 2) \approx 0.9$. Bodediagrammet ger även $\mid G(i2) \mid= 0.75$. För att få önskad skärfrekvens väljs K så att

$$K \mid F_{lead}(i2) \mid\mid G(i2) \mid= K \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot 0.75 = 1$$

vilket ger $K \approx 0.75$.

Eftersom störningen v kommer in mellan ventilen och dammen fås från blockschemat i uppgift 1 + återkoppling att $Y(s) = G_D(s)(V(s) + G_V(s)F(s)(R(s) - Y(s)))$ och

$$Y(s) = \frac{G_D(s)G_V(s)F(s)}{1 + G_D(s)G_V(s)F(s)}R(s) + \frac{G_D(s)}{1 + G_D(s)G_V(s)F(s)}V(s)$$

Det stationära felet ska vid en konstant störning med storlek ett vara (til-l absolutbeloppet) mindre än 0.01. Med $E(s) = R(s) - Y(s)$ ger slutvärdesteoremet (med $R(s) = 0$ och $V(s) = 1/s$)

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{-G_D(s)}{1 + G_D(s)G_V(s)F(s)}\frac{1}{s} = -\frac{-G_D(0)}{1 + G_D(0)G_V(0)F(0)}$$

Detta ger då med $F(s) = KF_{lead}(s)F_{lag}(s)$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) =\mid \frac{-G_D(0)}{1 + G_D(0)G_V(0)KF_{lead}(0)F_{lag}(0)} \mid= \frac{k_D\gamma}{\gamma + k_Dk_VK} \leq 0.01$$

I uppgiften finns inget som hindrar att välja $\gamma = 0$. Koefficienten τ_I väljs enligt tumregel $\tau_I = 10/\omega_{c,d} = 5$. Detta ger den resulterande regulatorn:

Svar:

$$F(s) = 0.75 \cdot \frac{0.9s + 1}{0.9 \cdot 0.3 \cdot s + 1} \cdot \frac{5 \cdot s + 1}{5 \cdot s}$$

(c) Enligt Figur 5.11 på sid 104 i läroboken motsvarar fasmarginal 60° att det återkopplade systemets stegsvar har en översläng på ca 8 procent och $\zeta \approx 0.63$. Ur Figur 5.12 fås då att $T_r \cdot \omega_c \approx 1.33$, och med $\omega_c = 2$ ger detta $T_r \approx 0.66$. **Svar:** $M \approx 8\%$ och $T_r \approx 0.66$ sek.

4. (a) Modellen med insatta koefficientvärden ges av

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

med matriserna

$$A = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Polerna ges av karaktäristiska ekvationen $\det(sI - A) = 0$, d v s

$$\det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s+1/3 & -2/3 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} = (s+1/3)(s+1) = 0$$

Svar: Poler i $s = -1/3$ och $s = -1$

(b) Tillståndsåterkopplingen

$$u(t) = -Lx(t) + l_0 r(t)$$

ger

$$\dot{x}(t) = (A - BL)x(t) + Bl_0 r(t)$$

med den karaktäristiska ekvationen

$$\begin{aligned}\det(sI - A + BL) &= \det \begin{pmatrix} s+1/3 & -2/3 \\ 5l_1 & s+1+5l_2 \end{pmatrix} = (s+1/3)(s+1+5l_2) + \frac{10}{3}l_1 = \\ &= s^2 + (\frac{4}{3} + 5l_2)s + \frac{1}{3}(1 + 5l_2 + 10l_1)\end{aligned}$$

Återkoppling som placerar polerna i $-\alpha$ motsvarar en karaktäristisk ekvation

$$(s+\alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 = 0$$

vilket ger ekvationerna

$$\frac{4}{3} + 5l_2 = 2\alpha$$

och

$$\frac{1}{3}(1 + 5l_2 + 10l_1) = \alpha^2$$

Ur dessa ekvationer kan l_1 och l_2 lösas ut

$$\begin{aligned}l_1 &= 0.3(\alpha - \frac{1}{3})^2\\ l_2 &= 0.4(\alpha - \frac{2}{3})\end{aligned}$$

Slutna systemets överföringsfunktion ges av

$$G_c(s) = C(sI - A + BL)^{-1}Bl_0$$

Statisk förstärkning 1 ger

$$\mid G_c(0) \mid = \mid C(-A + BL)^{-1}Bl_0 \mid = 1$$

Inversen blir

$$(-A + BL)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 5l_1 & 1+5l_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{3}(1+5l_2) + \frac{10}{3}l_1} \begin{pmatrix} 1+5l_2 & 2/3 \\ -5l_1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

vilket insatt i uttrycket för statisk förstärkning ger

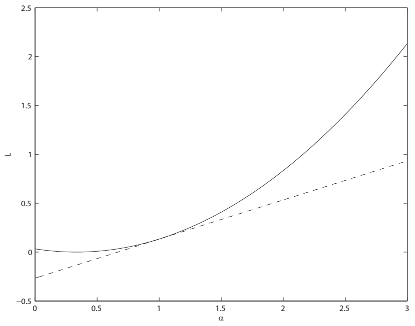
$$\begin{aligned}\mid C(-A + BL)^{-1}Bl_0 \mid &= \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\frac{1}{3}(1+5l_2) + \frac{10}{3}l_1} \begin{pmatrix} 1+5l_2 & 2/3 \\ -5l_1 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} l_0 \mid = \\ &= \mid \frac{1}{\frac{1}{3}(1+5l_2) + \frac{10}{3}l_1} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot l_o \mid = 1\end{aligned}$$

Ur detta fås, med utrycken för l_1 och l_2 insatta

$$l_0 = 0.3\alpha^2$$

Svar:

$$u(t) = -0.3(\alpha - \frac{1}{3})^2 \cdot x_1(t) - 0.4(\alpha - \frac{2}{3}) \cdot x_2(t) + 0.3\alpha^2 \cdot r(t)$$



Figur 1: Uppgift 4.c. $l_1(\alpha)$ (heldragen) och $l_2(\alpha)$ (streckad)

(c) Koefficienterna som funktion av α ges av figuren nedan.

En praktisk begränsning hos systemet är att styrsignalen normalt är begränsad. Stort α ger stora värden på L och därmed på styrsignalen.

Ett annat problem är risken för instabilitet. Ett stort α innebär ett snabbt system, och normalt finns det snabb dynamik i det verkliga systemet som inte finns med i modellen. Modellfelet kan därför leda till instabilitet, eller åtminstone försämrad prestanda.

5. (a) Det allmänna uttrycket för hur osäkerhet i modellen utrycks med det relativa modellfelet $\Delta G(s)$ är

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta G(s))$$

I detta fall gäller

$$G^0(s) = G(s)\frac{1}{\alpha s + 1}$$

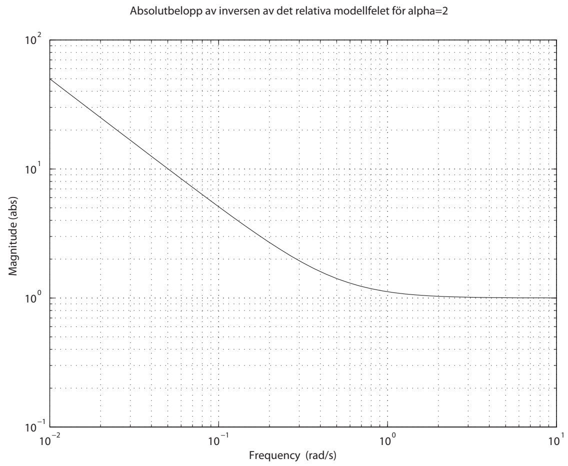
och en jämförelse mellan uttrycken ger

$$\Delta G(s) = \frac{-\alpha s}{\alpha s + 1}$$

(b) Absolutbeloppet av inversen av det relativa modellfelet ges av

$$\frac{1}{\mid \Delta G(i\omega) \mid} = \frac{\sqrt{\alpha^2\omega^2 + 1}}{\alpha\omega}$$

Figur 2 visar den kurva för fallet $\alpha = 2$. Kurvan har negativ lutning för låga frekvenser, "planar ut" omkring vinkelfrekvensen $1/\alpha$ och går mot ett då $\omega \to \infty$.



Figur 2: $1/ \mid \Delta G(i\omega) \mid$ för $\alpha = 2$.

(c) Robusthetskriteriet innebär att villkoret

$$\mid G_c(i\omega) \mid < \frac{1}{\mid \Delta G(i\omega) \mid}$$

måste vara uppfyllt för alla ω. För att detta ska gälla för alla $\alpha \geq 0$ måste

$$\mid G_c(i\omega) \mid < 1 \quad \forall\omega$$

eftersom högerledet i olikheten går mot ett.