Lösningsförslag till tentamen i Reglerteknik (TSRT03/TSRT12/TSRT19) 2016-08-19

1. (a) ”Sin in ger sin ut” fungerar ej här eftersom systemet är instabilt. Dessutom efterfrågas inte $y(t)$:s asymptotiska beteende, utan den exakta lösningen efterfrågas. Vi kan skriva $4 \cdot \sin(2t) = 8 \cdot \frac{1}{2}\sin(2t)$ och har således att transformen för insignalen, enligt A.24 sid 233 i boken, ges av $8 \cdot \frac{1}{s^2+4}$. Vi får

$$Y(s) = \frac{2}{s-3}\frac{8}{s^2+4} = 16\frac{1}{(s-3)(s^2+4)}$$

Partialbråksuppdelning

$$Y(s) = 16\left(\frac{A}{s-3} + \frac{Bs+C}{s^2+4}\right) = 16\left(\frac{A(s^2+4)+(Bs+C)(s-3)}{(s-3)(s^2+4)}\right) = 16\left(\frac{(A+B)s^2+(-3B+C)s+(4A-3C)}{(s-3)(s^2+4)}\right)$$

Identifiering ger $A = -B$, $C = 3B$, $4A - 3C = 1$ vilket blir $A = 1/13, B = -1/13, C = -3/13$. Vi får

$$Y(s) = \frac{16}{13}\left(\frac{1}{s-3} + \frac{-s-3}{s^2+4}\right) = \frac{16}{13}\left(\frac{1}{s-3} - \frac{s}{s^2+4} - 3\frac{1}{s^2+4}\right)$$

Laplaceinverse ger

$$y(t) = \frac{16}{13}\left(e^{3t} - \cos(2t) - 3\frac{1}{2}\sin(2t)\right)$$

Svar: $y(t) = \frac{16}{13}\left(e^{3t} - \cos(2t) - 3\frac{1}{2}\sin(2t)\right)$

(b) Stegsvar A och B går stationärt mot 4 och 3, de övriga mot 1, genom att läsa av den stationära förstärkningen i bodediagramen ($G(0i)$) fås A-III och D-II. Vidare är resonanstoppen kraftigare i I än i IV vilket återspeglas av ett mer oscillativt stegsvar: C-I och B-IV.

Svar: A-III, C-I, B-IV. D-II

(c) Ju större den relativa dämpningen ζ är, desto mindre överslāng. Detta ger direkt, (i)-D och (ii)-C. Vidare ger större ω_0 snabbare system, alltså (iv)-B och (iii)-A.

Svar: (i)-D, (ii)-C, (iii)-A, (iv)-B

2. (a) De faktorer som i praktiken begränsar vilka prestanda ett reglersystem kan ges är:

Svar: • Begränsad styrsignal. • Mätstörningar. • Modellfel.

(b) Med den givna återkopplingen fås det återkopplade systemets poler som nollställena till den karaktäristiska ekvationen

$$\det\big(Is - (A - BL)\big) = \det\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -2+l_1 & s-1+l_2 \end{pmatrix} = (s+1)(s-1+l_2).$$

Den stabila polen i -1 kan inte flyttas alltså kan inte polerna placeras godtyckligt (ej styrbart), men den andra polen kan placeras godtyckligt med l_2 och det återkopplade systemet går alltså att få stabilt.

Svar: Systemet är stabiliserbart, men ej styrbart.

(c) Utan integrerande del fås ett stationärt fel som minskar med ökande K_P: (ii)-A) och (iii)-C. För samma K_P och olika K_I fås svängigare stegsvar med större K_I: (i)-D) och (iv)-B.

Svar: (ii)-A), (iv)-B, (iii)-C, (i)-D)

3. (a) Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation ges av

$$s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{Kk_0}{\tau} = 0$$

vilket med insatta värden ger $s^2 + 4s + 200K = 0$. Jämförelse med $s^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$ ger $\omega_0^2 = 200K$ samt $2\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{200K} = 4$ vilket ger $K = \frac{1}{25} = 0.04$.

Svar: $K = \frac{1}{25} = 0.04$.

(b) Ekvationen $s^2 + 4s + 200K = 0$ medför att systemets poler ges av $s = -2 \pm \sqrt{4 - 200K}$. För stora K blir polerna komplexa. Realdelen är dock alltid negativ, dvs systemet kan ej bli instabilt. En rotort ritad för detta återkopplade system med avseende på K skulle således visa två asymptoter som går rakt upp resp. ner i det vänstra komplexa talplanet.

Svar: Systemet är alltid stabilt.

(c) $G^0(s)$ enligt förutsättningarna innebär att $\Delta G(s) = \alpha$. Då det är känt att $|\alpha| < 0.5$ innebär robusthetskriteriet kravet $|G_c(i\omega)| < 1/0.5 = 2$.

Amplitudkurvan får ej överskrida 2 för att stabilitet skall kunna garanteras. Figuren visar att kurvan överskrider detta värde, vilket betyder att stabilitet ej kan garanteras. Amplitudkurvans maxvärde är ca 2.5. Detta innebär att stabilitet kan garanteras om man med säkerhet vet att $|\alpha| < 0.4$.

Svar: Stabilitet kan endast garanteras om $|\alpha| < 0.4$.

4. (a) En lead-länk med $\beta = 0.1$ ger enligt diagrammet på s 106 fasavancering 55°. Om det enda kravet är att det återkopplade systemet skall vara asymptotiskt stabilt räcker det att $\phi_m > 0$. Vi kan alltså placera skärfrekvensen vid den frekvens där det öppna systemet har fas något över $-235°$. Avläsning i figuren ger att detta sker vid ca 20 rad/s.

Svar: Cirka 20 rad/s .

(b) Vid $\omega = 10$ rad/s gäller $\arg G(10i) = -180°$. Vi skall alltså fasavancera 45°. Eftersom systemet innehåller en integrator (en pol i origo), så kommer statiska reglerfelet vid konstanta referenssignaler vara noll. Vi vet alltså redan nu att vi ej kommer att behöva en lag-del, och behöver ej göra någon extra fasavancering för att kompensera för möjliga fasförluster från lag-del. Önskad fasökning fås t ex med $\beta = 0.17$. För att fasökningen skall placeras vid önskad skärfrekvensen väljer vi $\tau_D = 1/(10 \cdot \sqrt{0.17}) \approx 0.24$. Slutligen väljer vi K så att kretsförstärkningen faktiskt får amplitudförstärkning 1 i önskad skärfrekvens, dvs

$$\frac{K}{\sqrt{0.12}} \cdot |G(10i)| = 1 = 1.$$

Ur figuren fås att $|G(10i)| \approx 0.2$ vilket ger $K = \sqrt{0.17}/0.2 \approx 2.06$.

Svar: $F(s) = 2.06\frac{0.24s+1}{0.24 \cdot 0.17s+1}$.

5. (a) Skattningsfelet är $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ och dess dynamik ges av $\dot{e}(t) = (A - KC)e(t)$. Polpolynomet som definierar polerna ges

$$\det\big(Is - (A-KC)\big) = \det\Big(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\Big)\Big) = \det\begin{pmatrix} s+k_1 & -1 \\ k_2 & s \end{pmatrix} = s^2 + k_1 s + k_2$$

Önskat polpolynom är $(s+\alpha) = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2$. Vi får således $k_1 = 2\alpha$ och $k_2 = \alpha^2$.

(b) Effektivt så frågas det efter överföringsfunktionen från $n(t)$ till skattningen av $\dot{y}(t)$, och amplitudförstärkningen för denna överföringsfunktion i frekvensen 2. Vi har $\dot{y}(t) = x_2(t)$, och vi är således intresserade av överföringsfunktionen från $n(t)$ till $\hat{x}_2(t)$. Observatören definieras av

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(x_1(t) + n(t) - C\hat{x}) \\ &= (A-KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Kx_1(t) + Kn(t) \end{aligned}$$

Överföringsfunktionen från $n(t)$ till $\hat{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\hat{x}(t)$ ges enligt standard formel (med andra systemmatriser) av

$$\begin{aligned} H(s) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\big(Is - (A-KC)\big)^{-1}K \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s+k_1 & -1 \\ k_2 & s \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \frac{sk_2}{s^2 + k_1 s + k_2} \\ &= \frac{s\alpha^2}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2} = \frac{s\alpha^2}{(s+\alpha)^2} \end{aligned}$$

Vi ser omedelbart att förstärkningen går mot noll både för låga och höga frekvenser. Det kommer dock finnas ett band av frekvenser där förstärkningen blir icke försumbar. I frekvensen 2 får vi kravet

$$\left|\frac{\alpha^2 \cdot 2i}{(2i+\alpha)^2}\right| < 1$$

dvs

$$\frac{2\alpha^2}{\sqrt{2^2+\alpha^2}\sqrt{2^2+\alpha^2}} < 1$$

vilket ger $\alpha^2 < 2^2$ och således $\alpha < 2$. **Svar:** Övre gräns ges av $\alpha < 2$. Dvs, observatören kan inte göras godtyckligt snabb, om man vill undvika att förstärka mätstörningar med frekvens 2 rad/s.