Lösningar till tentamen i TSRT19/12 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2016-06-07

1. (a) Exempelvis:
   Referens $r(t)$ - Önskad tjocklek på plåt efter valsar.
   Utsignal $y(t)$ - Uppmätt tjocklek på plåt efter valsar.
   Styrsignal $u(t)$ - Den kraft som valsarna trycker på med på plåten, eller på lägre nivå kanske en ström till motorer som gör att valsarna rör sig mot eller från valsarna, och därmed genererar den behövda kraften.

   (b) En PD-regulator med ett lågpassfilter på derivatadelen. Propertionalförstärkning 10, derivataförstärkning 0.1, samt ett lågpassfilter där tidskonstanten är 0.01 sekunder, eller alternativt med brytfrekvens 100 rad/s.

   (c) Integralverkan används för att eliminera eller reducera statiska fel som uppkommer t.ex vid följning av referenser eller vid störningar.

   (d) Vi noterar att förstärkningen går mot 20dB (10) och är ganska konstant i låga frekvenser. Runt 10 rad/s har den börjat falla av (den har tappat ungefär 3dB vid 10 rad/s) och den faller av mot noll. För höga frekvenser faller förstärkningen av med 20dB per dekad (dvs från 0 till -20dB då vi går från 100 rad/s till 1000 rad/s, eller alternativt att förstärkning av minskat en faktor 10 då frekvensen ökat en faktor 10, lutning -1 i loglog-skala). Fasen börjar på $0°$ och går mot $-90°$. Allt stämmer med ett första ordningens system med en pol, $G(s) = \frac{b}{s+a}$, där statiska förstärkningen alltså är 10 och polen är runt 10 (eftersom vi verkar ha en bandbredd på 10 rad/s). Exakt räknat så har vi att fasen för ett sådant system ges av $-\arctan(\frac{\omega}{a})$, vilket genom studie av fasen i $\omega = 10$ gör att vi får $-\pi/4 = -\arctan(\frac{10}{a})$, dvs $a = 10$, och således $b = 100$.

   (e) Antingen så räknar vi standardmässigt sinus in - sinus ut med den modell som vi tagit fram ovan, men enklast är naturligtvis att bara använda Bodediagrammet, $y(t) = 10^{17/20} \cdot \sin(10t - \pi/4) = 7.07 \sin(10t - \pi/4)$.

2. (a) A blir instabilt för tillräckligt stort val av K då den reella polen rör sig in i HHP, B är alltid instabilt, C är instabilt för små K och D är instabilt för ett interval $K_1 \leq K \leq K_2$.

   (b) Nej. Vi ser polerna för slutna systemet i grenarna. Integralverkan uppkommer om öppna systemet har en pol i origo. Med $G(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ och propertionalåterkoppling så kommer slutna systemets polpolynom ges av $B(s) + KA(s)$, dvs öppna systemets poler ges av startpunkter , och vi har inget fall där en startpunkt ligger i origo.

   (c) Öppna systemets poler ges av startpunkter och öppna systemets nollpunkter motsvarar slutpunkter. Väldigt viktigt dock att räkna med multiplicitet, det kan ju t.ex vara multipla poler i samma startpunkt. Detta kan man se om det kommer flera grenar från samma startpunkt, eftersom varje gren motsvarar en pol. Vi har dock ingen sådan problematik här. A och B har tre poler 1 nollställe, C och D har 4 poler och två nollställen

   (d) Inget. Med en extra startpunkt, men ingen extra slutpunkt, så måste vi få en till asymptot. Med tre asymptoter så går dessa i riktningar $\pi/3, -\pi, -\pi/3$, dvs två av asymptoterna pekar ut i högra halvplanet, och således kommer alla system bli instabila för tillräckligt stort K.

3. (a) Polerna ges av egenvärden till A, dvs rötter till $\det(sI - A) = 0$. Vi får $\det(sI - A) = (s+2)s + 2 = 0$ som har lösningarna $s = -1 \pm i$. För att få dubbelt så snabbt slutet system så skall polernas avstånd till origo dubbleras, dvs vi skall placera polerna i $-2 \pm 2i$.

   (b) Styrlag $u = -\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} x + L_r r = -Lx + L_r$. Slutna systemet ges av $\dot{x} = (A - BL)x + BL_r r, y = Cx$. Slutna systemets poler ges av lösningar till $\det(sI - (A - BL)) = 0$. Önskat polpolynom $(s+2+2i)(s+2-2i)$, dvs s^2+4s+8. Identifiering av termer ger $l_1 = 1, l_2 = 3$. Slutna systemet blir $G_c(s) = C(sI - (A - BL))^{-1}BL_r = \frac{6L_r}{s^2+4s+8}$. För att få statisk förstärkning 1 krävs att $G_c(0) = 1$, dvs $L_r = 8/6 = 4/3$. Alternativt så kan vi titta på differentialekvationerna. Om vi stationäritet har $y = r$ så måste vi ha $3x_2 = r$ dvs $x_2 = r/3$. Då vi är i stationäritet så måste $\dot{x}_2 = 0$ vilket betyder $x_1 = 0$. Från $\dot{x}_1 = 0$ har vi, med insatt styrsignal och de stationära värdena på x att $0 = -2 \cdot 0 - 2 \cdot r/3 + 2(-1 \cdot 0 - 3 \cdot r/3 + L_r r)$, ur vilket vi får kravet $L_r = 4/3$.

(c) Vi har $\dot{y}_m(t) + y_m(t) = y(t)$, dvs $\dot{y}_m(t) + y_m(t) = 3x_2(t)$. Inför $x_3(t) = y_m(t)$ och vi har $\dot{x}_3(t) = -x_3(t) + 3x_2(t)$. Komplett modell blir

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y_m(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)\end{aligned}$$

4. (a) För att erhålla en fasmarginal på 45° så skall kretsförstärkningens fas vara $-135°$. En enkel ändring en förstärkning (dvs en P-regulator med förstärkning K) i kretsförstärkningen påverkar inte fasen. Sålunda så måste vi välja så att skärfrekvensen hamnar där vi nu har fasen $-135°$, vilket är vid 4.5 rad/s. Kretsförstärkningens amplitudförstärkning är där i nuläget ungefär -10dB, dvs 0.32. Vi väljer sledes $K = 1/0.32 = 3.12$ för att erhålla en skärfrekvens 4.5 rad/s med fasmarginal 45°.

   (b) Baserat på frågeställningen så misstänker vi att vi kommer använda en lag-länk, och tar höjd för detta. Eftersom frågan säger att vi ej får introducera mer lågfrekvensförstärkning än vad som krävs, så kan vi ej vara lata och använda $\gamma = 0$, även om det skulle visa sig funka.

   I nuläget är fasen $-180°$, och vi behöver alltså fasavancera $45° + 6° = 51°$ för att få önskad fasmarginal då en lag-länk finns med. Vi får $\beta = 0.12$ och $\tau_D = 1/(20\sqrt{0.12}) = 0.14$. Förstärkningen på nuvarande kretsförstärkning i önskad skärfrekvens ser ut att vara runt $-35dB = 0.018$ (eller så räknar man ut exakt då $G(s)$ är given. För att få önskad skärfrekvens väljer vi således $K = \sqrt{0.12}/0.018$.

   Vid ett stegsvar med amplitud 1 så kommer utsignalen enligt slutvärdesteoremet att konvergera mot $\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+F_{lag}(s)F_lead(s)G(s)}\frac{1}{s}$. Vi måste således lösa $0.02 = \frac{1}{1+\frac{1}{\gamma}\cdot K\cdot 2}$ och får $\gamma = 073$.

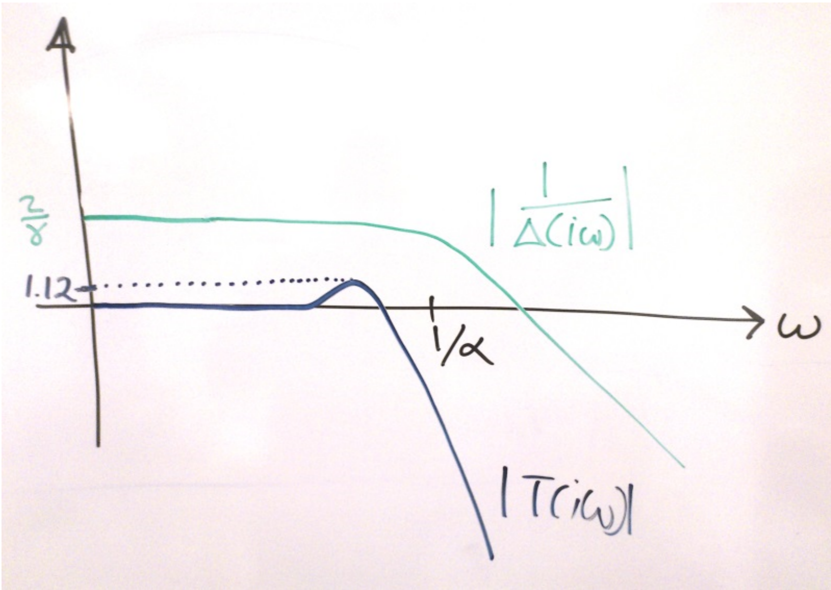
   τ_I väljs enligt tumregel till 10/20 för att säkerställa att lag-länken verkar i ett frekvensområde ordentligt separerat från skärfrekvensen (notera att $G(0) = 2$ definitivt inte bör försöka avläsas i diagrammet, förstärkningen ökar fortfarande för de lägsta frekvenserna som visas i diagrammet)

   (c) Fasförlusten i en tidsfördröjning T ges av ωT. Initial har vi fasmarginalen 45°, och detta är alltså den maximala förlusten som får ske i den designade skärfrekvensen, annars hamnar vi under $-180°$ och får instabilitet. Vi får $20T = pi/4$, dvs $T = \pi/80 = 0.039$.

5. (a) Robusthetskriteriet kräver en relativ modellfelsbeskrivning $G^0(s) = G(s)(1+\Delta(s))$. Vi skriver $G^0(s) = \frac{2+\gamma}{s^3+7s^2+4s} = \frac{2(1+\gamma/2)}{s^3+7s^2+4s} = G(s)(1+\gamma/2)$ och inser att det relativa modellfelet ges av $\gamma/2$. Robusthetskriteriet blir $|\gamma/2| \leq \frac{1}{|T(i\omega)|}$. Detta skall gälla i alla frekvenser, och eftersom vänsterledet är konstant, så måste det speciellt gälla då högerledet är som minst, dvs när $|T(i\omega)|$ är som störst. Vi ser att det största värdet ges av 1dB = 1.12. Kravet blir att $|\gamma| \leq \frac{2}{1.12} = 1.79$.

   (b) Samma omskrivning som ovan ger att det relativa modellfelet ges av $\Delta(s) = \frac{\gamma(1+s\alpha)}{2}$, dvs vi har modellosäkerhet i främst höga frekvenser eftersom $|\Delta(iw)|$ kommer vara uppåt begränsad av konstanten $\gamma/2$ upp till ungefär brytfrekvensen $\omega = 1/\alpha$, och därefter växa sig obeegränsat stor.

   (c) Robusthetskriteriet blir $\left|\frac{\gamma(1+s\alpha)}{2}\right| \leq \frac{1}{|T(i\omega)|}$. Eftersom vi har $|T(i\omega)|$ uppritad är det smidigare att vända på kravet $|T(i\omega)| \leq \left|\frac{2/\gamma}{1+s\alpha}\right|$. Eftersom $T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{2}{s^3+7s^2+4s+2}$ så faller dess förstärkning med lutning -3 (-60dB/dekad) för höga frekvenser. Det inversa modellfelet är ett första ordnings system, och faller således med lutning -1 (10dB/dekad). Om det inversa modellfelet lyckas passera ovanför den komplementära känslighetsfunktionenens resonanstopp kan således stabilitet garanteras. Detta sker om $|2/\gamma|$ är stort och $1/\alpha$ är stort. När $|2/\gamma|$ närmar sig den undre gränsen 1.12 kommer det krävas allt större $1/\alpha$ för att resonanstoppen skall kunna passeras utan skärning (kom ihåg att förstärkningen på inversa modellfelet är monotont avtagande, det är bara i skissfiguren som det ser ut som att den är konstant initialt)



Figur 1: Skiss för lösning av 5b