# Lösningar till tentamen i TSRT19/03 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2016-03-29
Johan Löfberg

1. (a) Exempelvis:

   Referens $r(t)$ - Den önskade ugnstemperatur som ställs in, typiskt via ett vred på spisens framsida.

   Utsignal $y(t)$ - Temperatur uppmätt inne i ugnen.

   Styrsignal $u(t)$ - Ström som används för att skapa värme i ugnselementet

   Modell - En fysikalisk beskrivning för hur en viss ström skapar en temperatur på värmeelementet i ugnen, och hur denna sedan sprider värme i ugnen (konvektion, strålning, etc.)

   Modellfel - Ej full kunskap om hur elementet värms upp av en viss ström, okända materialkoefficienter för olika fyskaliska fenomen.

   Störningar - Ugnen öppnas och kall luft kommer in.

   (b) Systemet förenklas först till $(\frac{1}{s+1})^2$. Antingen så räknar vi ut förstärkning och fasförskjutning för detta system, eller räknar vi ut förstärkning och fasförskjutning för $(\frac{1}{s+1})$ och noterar att vår insignal går genom två kopior av detta system. Förstärkningen för $(\frac{1}{s+1})$ i frekvensen 2 är $\frac{1}{2^2+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ och fasförskjutningen är $-\text{atan}(2)$. Vår signal kommer alltså ha amplitud $2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$ och fasförskjutas $-2\text{atan}(2) \approx -126.9°$.

   (c) Vi förenklar till $\frac{s+2}{(s+1)^3}$. Ingen förkortning sker, och en minimal realisering med t.ex styrbar form skulle kräva tre tillstånd.

   (d) Vi skriver i formen $F_1(s) = 1 + \frac{0.1}{s} + 2s$ och $F_2(s) = 1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}$ och drar slutsatsen att $F_1(s)$ är en PID-regulator. $F_2(s)$ är dock ej en PID-regulator (den implementerar en dubbelintegrator av något slag och har ej någon D-del).

2. (a) Stoppar man in uttrycket för regulatorn i systemet och flyttar runt lite fås:

$$Y(s) = \frac{K_P + K_D s}{s^2 + K_D s + K_P} R(s) + \frac{1}{s^2 + K_D s + K_P} V(s).$$

   Man ser då direkt att $K_D > 0$ och $K_P > 0$ krävs för att det återkopplade systemet ska vara asymptotiskt stabilt. För $K_P$ och $K_D$ valda så att ett stabilt system uppnås kan slutvärdesteoremet användas för att bestämma det stationära felet:

$$\left|\lim_{t\to+\infty} e(t)\right| = \left|\lim_{t\to+\infty} y(t) - r(t)\right| = \left|\lim_{s\to 0} s \frac{-1}{s^2 + K_D s + K_P} \frac{1}{s}\right| = \frac{1}{K_P} \le \frac{1}{10}$$

   Välj alltså exempelvis $K_P = 10$ och $K_D = 0.1$.

   (b) För relativdämpning 1 ska polerna placeras på reella axel, lös alltså för systemets poler och kräv att de ligger på reella axeln:

$$s = \frac{-K_D \pm \sqrt{K_D^2 - 4K_P}}{2} \quad \Rightarrow \quad K_D^2 - 4K_P \ge 0 \quad \Rightarrow \quad K_D \ge 2\sqrt{K_P}$$

   För att minimera förstärkningen välj $K_D = 2\sqrt{10}$.

   (c) Man ser direkt att störningen $n(t)$ påverkar utsignalen på samma sätt som $r(t)$ fast med omvänt tecken:

$$G_{n\to y}(s) = \frac{-F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = -\frac{K_P + K_D s}{s^2 + K_D s + K_P}$$

   (d) Vi framkopplar effekten av lasten och använder styrsignalen $U(s) = F(s)E(s) - V(s)$. Eftersom vi vet att ett extra moment $v(t)$ kommer att läggas på armen p.g.a lasten, så minskar vi det utställda momentet i motorn med motsvarande siffra, så de tar ut varandra.

3. (a) Från figur har vi $X_1(s) = \frac{2}{s+1}U(s)$ och $X_2(s) = \frac{4}{s+2}(X_1(s) + U(s)$ samt $Y(s) = X_1(s) + X_2(s)$. Vi får $Y(s) = \frac{2}{s+1}U(s) + \frac{4}{s+2}(\frac{2}{s+1}U(s) + U(s))$ vilket förenklas till $Y(s) = \frac{6s+16}{s^2+3s+2}U(s)$.

(b) I beskrivning från (a) är tillståndsmodellen så gott som utskriven, fast i Laplaceform. Multiplicera med nämnare och gör inverstransform ger $\dot{x}_1 + x_1 = 2u, \dot{x}_2 + 2x_2 = 4(x_1 + u), y = x_1 + x_2$. I standardformat

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

(c) I rotorten så ser vi att då $K = 0$ så har systemet en pol i ungefär $-32$, en pol i $-0.1$, samt två stabila komplexa poler. Då $K$ ökas så kommer de två reella polerna börja röra sig mot varandra längs reella axeln, och för något $K = K_1$ mötas (och ge upphov till en dubbelpol i ungefär $-14.5$) och därefter röra sig utåt i det komplexa talplanet. Då $K$ ökas kommer de två komplexa rötterna röra sig mot det högra halvplanet och för något $K = K_2$ så kommer de bli instabila. I ett interval $K_2 \leq K \leq K_3$ kommer de förbli instabila, men då $K = K_3$ så skär de återigen imaginära axeln för att sedan röra sig in igen i vänstra halvplanet och förbli stabila.

- Sant. Enligt analys ovan är systemet stabilt för $K < K_2$.
- Sant. Enligt analys ovan är systemet stabilt för $K > K_3$.
- Går ej att avgöra. Kan bara ske om $K_3 > K_1 > K_2$ men det vet vi ju inte om det gäller.
- Falskt. Två av polerna är alltid komplexa.
- Sant. Då $K > K_1$ är alla poler komplexa.

4. (a) Det kompenserade systemet har en skärfrekvens på 2rad/s och en fasmarginal på 40°, vilket om regulatorn är korrekt konstruerad således är de specifikationer på önskad skärfrekvens och fasmarginal som gjorts. Det kompenserade systemet ser ut att ha en oändlig lågfrekvensförstärkning (till skillnad från ursprungliga systemet som har en lågfrekvensförstärkning på 20dB). Fasen går mot $-90°$ vilket också indikerar att det finns en integrator i kompenserade sytemet. Man har sannolikt ställt kravet att man skall kunna följa konstanta referenssignaler utan något kvarvarande fel, och därför skapat en lag-del med en ren integration.

(b) Eftersom det kompenserade systemet har en integration till skillnad från det ursprungliga systemet, så innebär det att regulatorn har integralverkan, dvs vi har en lag-del där $\gamma = 0$. Med standardval av $\tau_I = \frac{10}{\omega_{c,önskad}} = \frac{10}{2} = 5$ fås $F_{lag}(s) = \frac{5s+1}{5s}$. Det okompenserade systemet har en fas $-180°$ vid den valda skärfrekvensen, och vi måste alltså fasavancera 40° för att nå $-140°$. Dock så kommer vår lag-del sänka fasen med 5.7°, så man har tagit höjd för det och avancerat totalt 45.7°. Tabell eller formel i boken ger $\beta = 0.17$ och vi får direkt även att $\tau_D = 1.21$. Okompenserade systemets förstärkning i önskade skärfrekvensen, $|G(2i)|$ är 10dB, dvs 3.16. För att vi skall erhålla skärfrekvensen 2 måste vi ha $|F(2i)G(2i)| = |F_{lag}(2i)F_{lead}(2i)G(2i)| = 1$. I sedvanlig ordning använder vi oss av att lag-länken i stort sett har förstärkningen 1 i den önskade skärfrekvensen, samt att lead-regulatorns förstärkning i önskade skärfrekvensen är $K/\sqrt{\beta}$. Vi löser $3.16K/\sqrt{0.17} = 1$ och får $K = 0.13$.
Sammanfattningsvis $F(s) = 0.13\frac{5s+1}{5s}\frac{1.21s+1}{0.21s+1}$

5. (a) Eftersom vi mäter $x_1$ så gäller det att $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Observatören ges av $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t))$ och vi skall således placera polerna till $A - KC$. Polerna ges av egenvärdena, som ges av $\det(\lambda I - (A - KC)) = 0$

$$\lambda I - (A - KC) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \left( \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda + k_1 & -1 \\ k_2 & -1 + \lambda \end{pmatrix} \right)$$

Vi vill ha poler/egenvärden i $-5$ och har därför ett önskat polpolynom $(\lambda + 5)^2 = \lambda^2 + 10\lambda + 25$. Vårt polynom blir $(1 + \lambda + k_1)(\lambda - 1) + k_2 = \lambda^2 + k_1\lambda + k_2 - k_1 - 1$. Identifiering ger $k_1 = 10$ och $k_2 = 36$.

(b) $y = \alpha + x_1$ där $\alpha$ är konstant. Utöka tillståndsvektorn med $x_3 = \alpha \Rightarrow \dot{x}_3 = 0$. Detta ger en utökad tillståndsmodell med

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Systemet är observerbart då observerbarhetsmatrisen ges av

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och dess determinant är $-1$ (ses även enkelt att alla kolumner är linjärt oberoende). Detta betyder att alla tillstånd kan skattas och man kan och placera egenvärdena till $A - KC$ godtyckligt. Observatören ges som vanligt av

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$