Lösningsförslag till tentamen i Reglerteknik (TSRT19) 2016-03-16

1. (a) Systemet är stabilt och linjärt. Därmed kan principen sinus in, sinus ut tillämpas. Givet insignalen $u(t) = \sin(t) = \sin(1 \cdot t)$ har vi

$$|G(i \cdot 1)| = \left|\frac{1}{i+2}\right| = \frac{1}{|2+i|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$\arg G(i \cdot 1) = \arg \frac{1}{i+2} = \arg 1 - \arg(2+i) = 0 - \arctan\frac{1}{2} = -\arctan\frac{1}{2}$$

Utsignalen blir därmed

$$y(t) = |G(i \cdot 1)| \cdot \sin(t + \arg G(i \cdot 1)) = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \sin\left(t - \arctan\frac{1}{2}\right)$$

när alla transienter har klingat av. För approximativ form har vi närmevärden $\frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.45$ och $\arctan\frac{1}{2} \approx 0.46$ [rad].

(b) Givet är systemet

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+8s+15}U(s)$$

med överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+8s+15}.$$

För att hitta systemets poler faktoriserar vi nämnarpolynomet.

$$\begin{aligned} s^2+8s+15 &= (s+4)^2 - 4^2 + 15 = (s+4)^2 - 1^2 \\ &= (s+4+1)(s+4-1) = (s+3)(s+5) \end{aligned}$$

Därmed kan överföringsfunktionen skrivas

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s+5)}$$

och direkt avläsning ger att systemet har ett enkelt nollställe i $s = -1$ samt varsin enkelpol i $s = -3$ och $s = -5$.

För att skriva systemet på tillståndsform partialbråksuppdelar vi $G(s)$. Denna partialbråksuppdelning ges av

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s+5)} = \frac{2}{s+5} - \frac{1}{s+3}$$

och systemet kan alltså skrivas

$$Y(s) = \left(\frac{2}{s+5} - \frac{1}{s+3}\right)U(s).$$

Vi inför nu tillståndsvariablerna

$$X_1(s) = \frac{1}{s+5}U(s) \text{ dvs. } \dot{x_1} = -5x_1 + u$$
$$X_2(s) = \frac{1}{s+3}U(s) \text{ dvs. } \dot{x_2} = -3x_2 + u$$

vilket ger att $y = 2x_1 - x_2$. En möjlig tillståndsform ges alltså av

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} x.$$

Alternativt kan systemet direkt skrivas på styrbar- eller observerbar kanonisk form (se Resultat 8.1 samt 8.2 i Glad & Ljung). Systemet på styrbar kanonisk form ges av

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -8 & -15 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

samt, slutligen, systemet på observerbar kanonisk form

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -15 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Notera att det finns ett oändligt antal sätt att representera ett linjärt system på tillståndsform. Formerna ovan (diagonal form, styrbar- och observerbar kanonisk form) är de tre vanligaste.

(c) Ett system är linjärt om och endast om det kan skrivas på formen

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = b_n u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + ... + b_0 u$$

System (i) och (iv) är på denna form och är därmed linjära. System (ii) är olinjärt ty det innehåller en $y^2(t)$-term och kan inte skrivas på linjär form. System (iii) är olinjärt ty det innehåller en konstantterm vilket inte finns med i en linjär form. System (v) är olinjärt ty vid multiplikation med $y(t)$ på båda sidorna får vi

$$\ddot{y}(t)y(t) + 2\dot{y}(t)y(t) = \dot{u}(t)$$

som även detta är uppenbart olinjärt och kan därmed inte representeras på den linjära formen.

2. (a) De tre faktorerna som begränsar godtyckligt bra reglering är

- Begränsade styrsignaler - Våra styrsignaler kan inte bli godtyckligt stora på grund av naturliga (och tekniska) begränsningar.

- Mätfel - Osäkerhet i mätningar av signaler.
- Modellfel - Osäkerhet i den matematiska modellen av systemet.

(b) Vi börjar med att placera polerna för det återkopplade systemet.

$$A - BL = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - l_1 & 2 - l_2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenvärdena för $A - BL$ ges av sekularekvationen.

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\lambda I - (A - BL)) = \det \begin{bmatrix} \lambda + l_1 - 1 & l_2 - 2 \\ -3 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + \lambda(l_1 - 1) + (6 - 3l_2) \end{aligned}$$

Jämförelse med polynomet $(\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$ ger oss genast vid identifiering av koefficienter att $l_1 - 1 = 4 \iff l_1 = 5$ och $6 - 3l_2 = 4 \iff l_2 = 10/3$. Därmed har vi att $L = \begin{bmatrix} 5 & 10/3 \end{bmatrix}$.

Med styrlagen $u(t) = -Lx(t) + l_0 r(t)$ insatt i systemet får det tillståndsåterkopplade systemet formen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BL)x(t) + Bl_0 r(t) = \begin{bmatrix} -4 & -4/3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} x(t) + l_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) &= Cx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Med $r(t) = 1$ har vi $R(s) = 1/s$. Låt $G(s)$ vara överföringsfunktionen för det återkopplade systemet. Eftersom $G(s)$ har sina poler strikt i VHP (dubbelpol i $s = -2$) gäller slutvärdesteoremet.

$$1 = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} sG(s)R(s) = \lim_{s \to 0} G(s) = G(0)$$

Så för att $y(t) = r(t) = 1$ i stationäritet kräver vi att $G(0) = 1$ (den statiska förstärkningen för det återkopplade systemet ska vara 1).

$$\begin{aligned} G(0) &= C(0 \cdot I - (A - BL))^{-1} l_0 B = l_0 \cdot C(-A + BL)^{-1} B \\ &= l_0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4/3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = l_0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -4/3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= l_0 \cdot \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Alltså väljer vi $l_0 = 4/3$ för att uppfylla kravet. Styrlagen ges därmed av $u(t) = -5x_1(t) - \frac{10}{3}x_2(t) + \frac{4}{3}r(t)$.

(c) Enligt rotorten där $K > 0$ har vi 3 poler. Ur rotorten kan vi direkt utläsa fyra olika fall

i. Tre rent reella stabila poler

ii. En rent reell stabil pol, ett komplexkonjugerat stabilt polpar

iii. En rent reell stabil pol, ett komplexkonjugerat marginellt stabilt polpar (ligger på imaginäraxeln)

iv. En rent reell stabil pol, en komplexkonjugerat instabilt polpar

Figur (a) motsvarar fall (i) eftersom stegsvaret är stabilt samt på grund av frånvaron av oscillationer. Låt K_a vara motsvarande K i rotorten. Figur (b) och (d) motsvarar båda fall (ii) eftersom alla poler är stabila samt att båda stegsvaren är oscillativa. Notera att stegsvaret i (b) är mer oscillativt än stegsvaret i (d). Med motsvarande definitioner K_b och K_d inser vi att $K_b > K_d$ eftersom imaginärdelarna i det komplexkonjugerade polparet växer med K. Slutligen, Figur (c) motsvarar fall (iv) eftersom stegsvaret är både instabilt och oscillatvit. Låt K_c vara motsvarande K i rotorten. Sammanfattningsvis gäller då att

$$K_a < K_d < K_b < K_c$$

och fallen med sina motsvarande K kan nu med enkelhet markeras på passande ställen i rotorten.

3. (a) Låt $u_2 = 0$ och $w = 0$ vilket ger systemet

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -2/15 & 1/30 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 8/3 \\ -80/3 \end{bmatrix} u_1$$

som är på formen $\dot{z} = Az + Bu_1$. För att avgöra om systemet är styrbart med u_1 som styrsignal beräknar vi styrbarhetsmatrisen, $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 & -56/45 \\ -80/3 & 88/9 \end{bmatrix}$$

Eftersom $\det \mathcal{S} = -\frac{64}{9} \neq 0$ ($\mathcal{S}$ har full rang) är systemet styrbart med u_1 som styrsignal.

(b) Systemet kan skrivas på formen

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} -2/15 & 1/30 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 8/3 \\ -80/3 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 1/10 \\ 0 \end{bmatrix} w \\ &= Az + B_1 u_1 + B_2 u_2 + B_3 w \end{aligned}$$

Låt $U_1(s)$, $U_2(s)$, $W(s)$ och $Z(s) = \begin{bmatrix} Z_1(s) & Z_2(s) \end{bmatrix}^T$ vara Laplacetransformer till u_1, u_2, w och z. Laplacetransform av båda sidor, med begynnelsevärden lika med noll, ger

$$\begin{aligned} sZ(s) &= AZ(s) + B_1U_1(s) + B_2U_2(s) + B_3W(s) \iff \\ (sI - A)Z(s) &= B_1U_1(s) + B_2U_2(s) + B_3W(s) \iff \\ Z(s) &= (sI - A)^{-1} \cdot (B_1U_1(s) + B_2U_2(s) + B_3W(s)) \end{aligned}$$

Inversen av en (inverterbar) 2×2-matris ges av

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

vilket ger oss att

$$\begin{aligned}
(sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s + 2/15 & -1/30 \\ -1/3 & s + 1/3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{30}{30s^2 + 14s + 1} \begin{bmatrix} s + 1/3 & 1/30 \\ 1/3 & s + 2/15 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{30s^2 + 14s + 1} \begin{bmatrix} 30s + 10 & 1 \\ 10 & 30s + 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

och överföringsfunktionen fås genom

$$Z(s) = \frac{1}{30s^2 + 14s + 1} \begin{bmatrix} 30s + 10 & 1 \\ 10 & 30s + 4 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 8/3 \\ -80/3 \end{bmatrix} U_1(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U_2(s) + \begin{bmatrix} 1/10 \\ 0 \end{bmatrix} W(s) \right)$$

Vi är endast intresserade av $Z_1(s)$ som ges av

$$\begin{aligned}
Z_1(s) &= \frac{1}{30s^2 + 14s + 1} \begin{bmatrix} 30s + 10 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 8/3 \\ -80/3 \end{bmatrix} U_1(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U_2(s) + \begin{bmatrix} 1/10 \\ 0 \end{bmatrix} W(s) \right) \\
&= \frac{80s}{30s^2 + 14s + 1} U_1(s) + \frac{1}{30s^2 + 14s + 1} U_2(s) + \frac{3s + 1}{30s^2 + 14s + 1} W(s)
\end{aligned}$$

vilket skulle visas.

4. (a) Genom antagande att $U_2(s) = 0$ har vi systemet

$$Z_1(s) = \frac{80s}{30s^2 + 14s + 1} U_1(s) + \frac{3s + 1}{30s^2 + 14s + 1} W(s)$$

och med en P-regulator, $U_1(s) = -KZ_1(s)$, erhåller vi

$$\begin{aligned}
Z_1(s) &= \frac{80s}{30s^2 + 14s + 1} (-KZ_1(s)) + \frac{3s + 1}{30s^2 + 14s + 1} W(s) \iff \\
Z_1(s) \cdot \left(1 + \frac{80Ks}{30s^2 + 14s + 1} \right) &= \frac{3s + 1}{30s^2 + 14s + 1} W(s) \iff \\
Z_1(s) \cdot \frac{30s^2 + (80K + 14)s + 1}{30s^2 + 14s + 1} &= \frac{3s + 1}{30s^2 + 14s + 1} W(s) \iff \\
Z_1(s) &= \frac{3s + 1}{30s^2 + (80K + 14)s + 1} W(s)
\end{aligned}$$

För att kunna använda oss av slutvärdesteoremet måste vi förvissa oss om att systemets poler ligger i VHP. Detta gäller eftersom polpolynomet, $p(s) = 30s^2 + (80K + 14)s + 1$, är ett andragradspolynom och har endast reella, positiva koefficienter. Detta innebär att båda rötterna till $p(s)$ måste ha negativa realdelar. Därmed ligger systemets poler strikt i VHP och slutvärdesteoremet kan användas (se även diskussionen av Rouths algoritm i Glad & Ljung).

Låt w vara konstant på en godtycklig nivå c vilket ger $W(s) = c/s$. Det stationära tillståndet för $z_1(t)$ ges då av

$$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{s\to 0} sZ_1(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{3s+1}{30s^2 + (80K+14)s + 1}\frac{c}{s} = 1 \cdot c \neq 0.$$

Därmed går det inte att uppfylla kravet med en P-regulator, vilket skulle visas.

(b) Med en en PI-regulator, $U_1(s) = -K\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)Z_1(s)$, får vi att

$$\begin{aligned}
Z_1(s) &= \frac{80s}{30s^2+14s+1}\left(-K\left(1+\frac{1}{sT_i}\right)Z_1(s)\right) + \frac{3s+1}{30s^2+14s+1}W(s) \iff \\
Z_1(s)\cdot\left(1+\frac{80Ks+\frac{80K}{T_i}}{30s^2+14s+1}\right) &= \frac{3s+1}{30s^2+14s+1}W(s) \iff \\
Z_1(s)\cdot\frac{30s^2+(80K+14)s+\frac{80K}{T_i}+1}{30s^2+14s+1} &= \frac{3s+1}{30s^2+14s+1}W(s) \iff \\
Z_1(s) &= \frac{3s+1}{30s^2+(80K+14)s+\frac{80K}{T_i}+1}W(s)
\end{aligned}$$

Med samma resonemang som tidigare ser vi att det återkopplade systemet har alla poler strikt i VHP. Slutvärdesteoremet ger oss därmed, när $W(s) = c/s$, att

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{s\to 0} sZ_1(s) &= \lim_{s\to 0} s\frac{3s+1}{30s^2+(80K+14)s+\frac{80K}{T_i}+1}\frac{c}{s} \\
&= \frac{1}{\frac{80K}{T_i}+1}\cdot c = \frac{T_i}{T_i+80K}\cdot c
\end{aligned}$$

Eftersom $T_i > 0$ går det inte att uppfylla kravet med en PI-regulator, vilket skulle visas.

(c) Med styrlagen $U_1(s) = -K\left(1+\frac{1}{s^2T_i}\right)$ har vi en dubbelintegrator i regulatorn. Med en integrator i regulatorn kommer styrsignalen att växa tills reglerfelet är 0. Men eftersom shuntventilen varken kan stängas eller öppnas "helt" kommer styrsignalen att begränsas och reglerfelet blir därmed aldrig 0. Vidare, man inser även att det är omöjligt att kompensera för ändringar i utomhustemperaturen (T_u) genom att bara ändra shuntventilens läge då detta inte tillför mer energi till uppvärmningen utan omfördelar bara energin mellan panna och radiatorerna.

(d) Med $U_1(s) = 0$ har vi att

$$Z_1(s) = \frac{1}{30s^2+14s+1}U_2(s) + \frac{3s+1}{30s^2+14s+1}W(s)$$

En framkoppling från störsignal ska implementeras (se Glad & Ljung kapitel 7.3) där w är störsignalen. Med införd framkopplingslänk $F_f(s)$ erhålls

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= \left(\frac{3s+1}{30s^2+14s+1} + \frac{1}{30s^2+14s+1}F_f(s)\right)W(s) \\ &= \frac{3s+1+F_f(s)}{30s^2+14s+1}W(s). \end{aligned}$$

För att helt eliminera störning väljs teoretiskt sett $F_f(s) = -(3s+1)$ men då denna framkopplingslänk innehåller en derivering är den inte implementebar i praktiken. Därför väljer vi $F_f(s) = -1$ som är en konstant framkoppling. Med detta val erhålls sambandet

$$Z_1(s) = \frac{3s}{30s^2+14s+1}W(s).$$

Eftersom polerna ligger strikt i VHP ger slutvärdesteoremet oss vid konstant w

$$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = \lim_{s\to 0} sZ_1(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{3s}{30s^2+14s+1}\frac{c}{s} = 0\cdot c = 0$$

och därmed uppfyller framkopplingslänken kraven.

(e) Fördelen med framkopplingen är att den, då väl allt har svängt in sig, väl kompenserar förändringar i utomhustemperaturen. Nackdelen är att det tar relativt lång tid innan man märker kompenseringen i inomhustemperaturen. Fördelen med återkopplingen är att den snabbt kompenserar för tillfälliga förändringar i inomhustemperaturen. Nackdelen är att den ej klarar av att upprätthålla denna kompensering någon längre tid.

5. (a) Ur faskurvan ser vi att $\omega_p = 0.6$ rad/s (det vill säga, $\arg G_p(i\omega_p) = -180^\circ$). Vidare gäller att $|G_p(i\omega_p)| \approx 8\cdot 10^{-2} = 0.08$ vilket ger $A_m = 1/0.08 = 12.5$. Eftersom det gäller för P-regulatorns förstärkning, $K = 1 < A_m = 12.5$ kommer det återkopplade systemet att vara stabilt.

(b) Kraven för vår PD-regulator, $F_{PD}(s) = K(1+T_D s)$, är fasmarginalen $\varphi_m = 60^\circ$ samt önskad skärfrekvens $\omega_{c,d} = 0.4$ rad/s. Ur Bodediagrammet har vi att $\arg G_p(i\omega_{c,d}) \approx 150^\circ$ vilket innebär att vi behöver en fasanvancering på ungefär $\varphi_{m,d} = -120^\circ - (-150^\circ) = 30^\circ$ i önskad skärfrekvens.

$$\begin{aligned} \arg F_{PD}(i\omega_{c,d}) &= \arg K(1+iT_D\omega_{c,d}) = \arg K + \arg(1+iT_D\omega_{c,d}) \\ &= 0 + \arctan T_D\omega_{c,d} = \arctan T_D\omega_{c,d} = 30^\circ \end{aligned}$$

Detta ger oss genast att $T_D = \frac{1}{\omega_{c,d}} \cdot \tan 30^\circ = 2.5 \cdot \tan 30^\circ = 1.443... \approx 1.44$. För att erhålla önskad skärfrekvens kräver vi att $|G_p(i\omega_{c,d})||F_{PD}(i\omega_{c,d})| = 1$. Avläsning ur Bodediagrammet ger oss att $|G_p(i\omega_{c,d})| \approx 0.15$. Vidare gäller att

$$|F_{PD}(i\omega_{c,d})| = |K(1 + iT_D\omega_{c,d})| = K|1 + iT_D\omega_{c,d}| = K\sqrt{1 + T_D^2\omega_{c,d}^2}$$

Detta ger oss slutligen att

$$K = \frac{1}{|G_p(i\omega_{c,d})||1 + iT_D\omega_{c,d}|} = \frac{1}{0.15 \cdot \sqrt{1 + 1.44^2 \cdot 0.4^2}} = 5.776... \approx 5.78$$

och vår PD-regulator ges därmed av $F_{PD}(s) = 5.78 \cdot (1 + 1.44s)$.