Lösningar till tentamen i TSRT19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2016-01-12

Johan Löfberg

1. (a) Problemet blir främst att försöka reglera avståndet till framförvarande lastbil.

   Styrsignal $u(t)$ - gaspådrag/broms, pålagt moment på drivlina, önskad acceleration, eller liknande, för att accelerera och retardera lastbilen.

   Utsignal $y(t)$ - avstånd till framförande lastbil (mätes t.ex med radar)

   Referens $r(t)$ - Önskat avstånd till lastbilen framför. Önskat avstånd blir en kompromiss mellan maximalt utnyttjande av aerodynamiska effekter, men samtigt inte trafikfarligt om något går fel.

   Vi kan skapa en ganska bra modell över hur vår lastbils hastighet påverkas av vår valda insignal, dvs moment på drivlina etc. Däremot är det svårt att modellera framförvarande lastbils hastighet (den bestäms ju av dess chaufför eller autopilot). Vi kommer således förmodligen behöva hantera framförvarande lastbils hastighetsförändring som en störning i systemet. Ett mer avancerat reglertekniskt system skulle kunna baseras på att lastbilarna kommunicerar med varandra, och detta är ett hett forskningsområde nu.

   (b) Systemet är asymptotiskt stabilt och utsignal kommer ges av $4|G(3i)|\sin(3t+arg(G(3i)))$. Vi har $|G(3i)| = \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}} = 0.277$ och $\arg(G(3i)) = -\arctan(3/2) = -0.98 = -56.3°$

   (c) Systemet är instabilt, $\dot{y} = y + u$, och således går utsignalen mot ∞ (eller $-\infty$ beroende på initialtillstånd)

   (d) Nämnaren är ett 5:e gradens polynom, således krävs fem tillstånd (nämnaren har lägre ordning, och har inga gemnsamma rötter med täljaren som förkortas bort). Ses enkelt om man t.ex utvecklar polynomen och använder styrbar eller kanonisk form.

   (e) Summerar vi de två överföringsfunktionerna så får vi summan $\frac{1}{2}$. Detta kan ej stämma då vi vet att vi alltid måste ha $S + T = 1$.

2. (a) Rotort 1 och 3 uppvisar enbart reella poler för alla K. Rotort 2 har komplexvärda poler för tillräckligt stora K, och rotort 4 påvisar komplexvärda poler för alla K, men har dock förmodligen en dominerande reell pol för små K. Stegsvar A och B har inga oscillationer för något K. Stegsvar C och D har oscillationer för tillräckligt stora K.

   Rotort 3 har en dominerande pol som ej ändrar sig nämnvärt m.a.p. K. Stegsvar A har stegsvar med ungefär samma stigtid oavsett val av K. Således (A,3), och per uteslutning (B,1).

   Rotort 4 visar på ett system som kan bli instabilt, men är stabilt för små K och domineras då av en långsam reell pol. Stegsvar i C är på gränsen instabilt för stora K samt långsamt monotont för små K. Således (C,4) och (D,2).

   Notera att man kan lösa uppgiften utan att egentligen veta vilken av de tre stegsvaren som är vilka, dvs alla stegsvar skulle kunna ha varit heldragna.

   (b) Om vi antar $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ och använder $F(s) = K$ så får vi slutna systemet $\frac{KN(s)}{D(s)+KN(s)}$. Rotorten är alltså ritad för karakteristiska ekvatione n $D(s) + KN(s) = 0$. Startpunkterna är per definition rötterna till $D(s)$. System 1, 2 och 4 har en startpunkt i origo, dvs en pol i 0. Således ser $G(s)$ ut som $\frac{N(s)}{s\tilde{D}(s)}$ för dessa system, dvs de har integralverkan. System med integralverkan som återkopplas med en P-regulator har statisk förstärkning 1 oavsett val av förstärkning K. Syns enkelt i vår notation här med $G_c(0) = \frac{KN(0)}{0\tilde{D}(0)+KN(0)} = \frac{N(0)}{N(0)} = 1$

   (c) Slutna systemet från $R(s)$ till $Y(s)$ ges av $\frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$. Insättning ger $\frac{s+1}{(s+2)(s+3)+(s+1)} = \frac{s+1}{s^2+6s+7}$ som har stabila rötter (notera att $(-s+1)$ förkortades bort)

   Syrsignalen ges av $U(s) = F(s)(R(s) - G(s)U(s))$ ur vilket vi får $U(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)G(s)}R(s)$. Insättning ger $\frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{(-s+1)(s^2+6s+7)}$. Det viktiga vi ser här är att vi har en instabil pol. Vid ett stegsvar kommer alltså styrsignalen att gå mot oändligheten. Det öppna systemet har ett problematiskt instabilt nollställe (som kan ge underslängar etc). I reglerdesignen har vi försökt trolla bort detta ur det slutna system genom att förkorta bort det i regulatorn. Det straffar sig dock uppenbarligen. I praktiken skulle man dessutom få ett instabilt stegsvar, eftersom vi aldrig vet polerna exakt, och när vi sedan försöker förkorta bort systemets instabila pol, så kommer detta ej lyckas exakt.

3. (a) Kretsförstärkningen blir $G_o(s) = \frac{K}{sT+1}$ och skärfrekvensen definieras av $|G_o(i\omega_c)| = 1$. Här får man att

$$\frac{K}{\sqrt{\omega_c^2 T^2 + 1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad K^2 = \omega_c^2 T^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{\sqrt{K^2-1}}{T}.$$

(b) Det slutna systemets bandbredd är den vinkelfrekvens ω_B där $|G_c(i\omega_B)| = \frac{|G_c(0)|}{\sqrt{2}}$. I det aktuella fallet är det slutna systemet

$$G_c(s) = \frac{K}{sT + 1 + K}$$

vilket ger

$$\frac{K}{\sqrt{\omega_B^2 T^2 + (1+K)^2}} = \frac{K}{(1+K)\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad 2(1+K)^2 = \omega_B^2 T^2 + (1+K)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_B = \frac{1+K}{T}.$$

(c) Vi har $\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$ samt $\dot{x}_2 = \ddot{y} = \frac{1}{m}(-f\dot{y} - ky + u) = \frac{1}{m}(-fx_2 - kx_1 + u)$. Vår tillståndsmodell blir

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -f/m \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

(d) Antingen så räknar på med egenvärdesplacering av $A - BL$ med modellen ovan, eller så stoppar man in återkopplingen $u = -Lx + r = -l_1 x_1 - l_2 x_2 + r = -l_1 y - l_2 \dot{y} + r$ direkt i den ursprunglig modellen, $\ddot{y} = -\dot{y} - y + u = -\dot{y} - y - l_1 y - l_2 \dot{y} + r$. Laplacetransformering ger att slutna systemet ges av $Y(s) = \frac{1}{s^2 + (l_2+1)s + (l_1+1)} R(s)$. Önskat polpolynom $p(s) = (s+5)^2 = s^2 + 10s + 25$ ger att $l_1 = 24$ och $l_2 = 9$.

4. (a) Polerna ges av -1, -10 samt -100 och det finns inga nollställen. Den statiska förstärkningen är $G(0) = 1.7$

(b) System kan ses som tre seriekopplade delsystem med väldigt olika tidskonstanter (1s, 0.1s, samt 0.01s). Polen i -1 är alltså en dominerande pol, och de två övriga polerna är mycket snabbare och dynamiken i dessa delsystem kan således bortses från. Viktigt att notera är dock att den sista termen i nämnaren ändrar den statiska förstärkningen med en faktor 10 som måste tas med. Vi skriver alltså $G(s) = \frac{17}{s+1} \cdot \frac{1}{.1s+1} \cdot \frac{0.1}{.01s+1}$ och använder approximationen $\hat{G}(s) = \frac{17}{s+1} \cdot 1 \cdot 0.1$

(c) $\lim_{t\to\infty} y(t)$ då $u(t) = c$ ges av $\lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{c}{s} = G(0)c$. Vi löser alltså $7 = G(0)c$ och får $c = 7/1.7$.

(d) Från blockschema har vi $Y(s) = G(s)(V(s) + F(s)(R(s) - Y(s))$ vilket leder till $Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)} V(s) + \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)} R(s)$. Överföringsfunktionen av intresse är alltså $\frac{G(s)}{1+G(s)F(s)}$.

(e) Överföringsfunktionen från referenssignal $R(s)$ till reglerfel $E(s)$ ges av känslighetsfunktionen $S(s) = \frac{1}{1+F(s)G(s)}$. Vi har att $\lim_{t\to\infty} e(t)$ då $r(t) = c$ ges av $\lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)\frac{c}{s} = S(0)c$. Således är $S(0) = 0.05$. Enligt ovan ges överföringsfunktionen från en insignalsstörning till utsignalen av $\frac{G(s)}{1+G(s)F(s)} = G(s)S(s)$. Slutvärdesanalys m.a.p. givna insignalsstörningen ger $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)S(s)\frac{A}{s} = G(0)S(0)A = 1.7 \cdot 0.05A$. Påverkan blir alltså $1.7 \cdot 0.05\%$.

5. (a) Det aktuella systemet har poler i $s = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ och är därför insignal-utsignalstabilt. Slutvärdesteoremet kan därför användas och det ger när insignalen är ett enhetssteg att

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{2-s}{s^2+3s+1}\frac{1}{s} = 2.$$

Antag att systemet startar i vila, det vill säga att $y(0) = 0$. Då gäller sambandet $\mathcal{L}[\dot{y}(t)](s) = sY(s)$ och begynnelsevärdesteoremet ger att

$$\lim_{t\to 0} \dot{y}(t) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to\infty} s^2 \frac{2-s}{s^2+3s+1}\frac{1}{s} = -1.$$

Trots att slutvärdet är positivt är den initiala derivatan av stegsvaret negativ, det vill säga det går först åt fel håll.

(b) Bodediagrammet visar att fasen avtar med växande vinkelfrekvens och att den så småningom passerar $-180°$. Det återkopplade systemet kommer att bli så snabbt som möjligt om skärfrekvensen väljs så stor det går när parametern β uppfyller $\beta \geq 0.2$. Figur 5.13 i Glad-Ljung visar att den maximala fasavanceringen för en lead-länk avtar med växande β och att den största fasavanceringen som är möjlig här är $42°$ och fås för $\beta = 0.2$. Om vi kan avancera som mest $42°$ och måste ha en fasmarginal på $50°$, så måste vi initialt ha en fasmarginal på minst $8°$ i det okompenserade systemet. Eftersom vi dessutom kommer att använda en lag-länk som ger en förlust på $6°$, så måste den initiala fasmarginalen vara minst $14°$, dvs det okompeserade systemet har en fas på $-166°$. Den maximala skärfrekvensen är därför den vinkelfrekvens där $\arg(G(i\omega)) = -166°$. Avläsning i bodediagrammet ger att $\arg(G(i2.1)) \approx -166°$ och vi har alltså $\omega_{c,d} = 2.1$. Vi väljer $\tau_D = 1/(\omega_{c,d}\sqrt{\beta}) \approx 1.1$. Förstärkningen K i lead-länken ska väljas så att skärfrekvensen blir den önskade. Med valet av τ_D ovan och med $|G(i2.1)| \approx -8\,\mathrm{dB} = 10^{-8/20} \approx 0.40$ avläst i bodediagrammet får man

$$|F_{lead}(i2.1)G(i2.1)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}0.40 = 1 \quad \Rightarrow \quad K \approx 1.1$$

Om $F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s)$ så ges det stationära reglerfelet när referenssignalen är ett enhetssteg av felkoefficienten e_0 (känslighetsfuntionens statiska förstärkning) och eftersom $G(0) = 2$ får vi att

$$e_0 = \frac{1}{1 + F_{lead}(0)F_{lag}(0)G(0)} = \frac{1}{1 + 1.1 \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot 2} \leq 0.01 \quad \Rightarrow \quad \gamma \leq \frac{2.2}{99} \approx 0.022$$

Genom att välja γ så stort som möjligt undviker man onödigt hög förstärkning vid låga frekvenser. Parametern τ_I väljs till $\tau_I = 10/\omega_{c,d} = 4.8$ enligt tumregel. Den resulterande regulatorn är

$$F(s) = 1.1\frac{1.1s + 1}{0.2 \cdot 1.1s + 1} \cdot \frac{4.8s + 1}{4.8s + 0.022}$$