Lösningar till tentamen i Reglerteknik

Tentamensdatum: 4 januari 2016

1. (a) Laplacetransformering av differentialekvationen ger överföringsfunktionen $G(s) = \frac{k}{\tau s+1}$. Figur 1 ger att insignalen är en sinussignal, $u(t) = \sin(\omega t)$, vilket ger att utsignalen blir på formen $y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \phi)$ där $\phi = arg(G(i\omega))$.

   Ur figur 1 utläses att periodtiden för insignalen är $T = 3.14s$, vilket ger vinkelfrekvensen $\omega = 2$. Vidare kan tidsförskjutning, 0.4 sek, och förstärkning, 1.4, avläsas ur figuren. Tidsförskjutningen ger att fasförskjutningen är 0.8 rad.

   Ur sambanden

$$
\begin{aligned}
|G(i\omega)| &= \frac{k}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} \\
arg(G(i\omega)) &= -arctan(\tau\omega)
\end{aligned}
$$

   löses sedan $k = 2$ och $\tau = 0.5$ ut.

   (b) (i) och (ii) har statisk förstärkning 2 respektive 0.5, D och A har slutvärde 2 respektive 0.5.

   (iv) har komplexkonjugerade poler, av stegsvar C och B har endast C översläng.

   Svar: (i)-D, (ii)-A, (iii)-B, (iv)-C.

   (c) Det återkopplade systemets poler inte kan placeras godtyckligt eftersom det inte är styrbart (se styrbarhetskriteriet).

2. (a) Oändlig förstärkning vid låga frekvenser gör att B, C kopplar till I, II ($G_c(0) = 1$). Vidare matchar resonanstoppen i I skärfrekvensen i B som dessutom har liten fasmarginal. På samma sätt matchar den mindre resonanstoppen i II väl skärfrekvensen i C (något större fasmarginal). B–I, C–II.

   Vidare har A något större lågfrekvensförstärkning än D vilket parar ihop A–III och D–IV pga lågfrekensförstärkningen i G_c. Samma resultat fås genom att jämföra resonanstopparna och skärfrekvens och fasmarginal i systemen.

   (b) Känslighetsfunktionen är $S(s) = \frac{1}{1+F(s)G(s)} = \frac{s(s+1)}{s(s+1)+K}$, med förstärkning $|S(i0)| = 0$ vid vinkelfrekvensen $\omega = 0$.

   (c)

$$
|S(i\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^4+\omega^2}}{\sqrt{(\omega^2-K)^2+\omega^2}}
$$

$$
\begin{aligned}
|S(i\omega)| > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{\omega^4+\omega^2}}{\sqrt{(\omega^2-K)^2+\omega^2}} > 1 \Leftrightarrow \frac{\omega^4+\omega^2}{(\omega^2-K)^2+\omega^2} > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \omega^4+\omega^2 > (\omega^2-K)^2+\omega^2 \Leftrightarrow \omega^4 > \omega^4 - 2\omega^2 K + K^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\omega^2 K > K^2 \Leftrightarrow \omega > \sqrt{\frac{K}{2}}
\end{aligned}
$$

3. (a) Systemet ges av

$$G(s) = \frac{1}{0.1s^2 + 0.01s}$$

Använd en lead-lag-kompensering för att nå de uppställda målen. Fasen vid den önskade skrfrekvensen $\omega_{cd} = 10\,\mathrm{rad/s}$ är ca $-179°$, d v s vi måste fasavancera med $60° - 1° + 6° = 65°$, där de extra $6°$ läggs till för den eventuella laglänkens försämring av fasen. Figur 5.13 ger $\beta \approx 0.05$, vilket ger $\tau_D = \frac{1}{\omega_{cd}\sqrt{\beta}} = \frac{1}{10\sqrt{0.05}} \approx 0.45$. Uträkning av K för att få den önskade skärfrekvensen ges av

$$K|G(i\omega_{cd})||F_{lead}(i\omega_{cd})| = 1$$

och detta ger

$$K \approx \frac{1}{0.1\frac{1}{\sqrt{\beta}}} \approx 2.24$$

Den fasavancerande länken ges nu av

$$F_{lead}(s) = 2.24\frac{0.45s+1}{0.0225s+1}$$

Reglerfelet ges av

$$E(s) = R(s) - Y(s) = -Y(s) = -G(s)\big(V(s) + F(s)E(s)\big)$$

vilket ger

$$E(s) = \frac{-G(s)}{1+G(s)F(s)}V(s) + \frac{1}{1+F(s)G(s)}R(s)$$

Utgående från att $r(t) = 0$ och att $v(t)$ är ett steg med amplitud ett ger slutvärdesteoremet att

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{-G(s)}{1+G(s)F(s)}\frac{1}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{-1}{(0.1s^2+0.01s)(0.0225s+1) + 2.24\cdot(0.45s+1)} \approx -0.446$$

dvs $|e(t)| \approx 0.446 > 0.01$ i stationärt tillstånd. En laglänk behövs! Samma räkningar med en laglänk ger kravet $\frac{\gamma}{2.24} \leq 0.01$ och $\gamma = 0.0224$. Välj sedan $\tau_I = \frac{10}{\omega_{cd}} = 1$ och lag-länken fås till

$$F_{lag}(s) = \frac{s+1}{s+0.0224}$$

Kravet $\mid F(0) \mid < \infty$ uppfylls med dessa val av lead-lag-parametrar; $\mid F_{lead}(0)F_{lag}(0) \mid = 100 < \infty$.

(b) (1) Eftersom $F(s)$ har en faktor s i nämnaren uppfylls inte kravet att $\mid F(0) \mid < \infty$.

(2) Eftersom $F(s)$ har högre gradtal i täljaren än i nämnaren går $\mid F(i\omega) \mid$ mot ∞ då $\omega \to \infty$, d v s det strider mot kravet att högfrekvensförstärkningen inte får vara alltför hög.

4. (a) Det återkopplade systemet ges av

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r(t) \\ &= \begin{pmatrix} -1 - l_1 & -l_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r(t)\end{aligned}$$

Det slutna systemets egenvärden fås ur den karakteristiska ekvationen

$$\begin{aligned}0 &= \det(\lambda I - (A - BL)) \\ &= (\lambda + 1 + l_1)(\lambda + 1) + l_2 \\ &= \lambda^2 + (2 + l_1)\lambda + (1 + l_1 + l_2)\end{aligned}$$

Vi önskar placera polerna i $-\alpha$, dvs

$$0 = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2$$

En jämförelse mellan ekvationerna ger $l_1 = 2\alpha - 2$ och $l_2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1$.

Svar: Återkopplingen ges av:

$$u(t) = -(2\alpha - 2 \quad \alpha^2 - 2\alpha + 1)x(t) + r(t).$$

(b)
- Överslängen för det återkopplade systemet är noll.
- Systemets snabbhet ges av polerna avstånd till origo, vilket ger att ett stort värde på α ger en kortare stigtid, medan ett mindre värde ger en längre stigtid.
- I praktigen avgörs dock hur snabbt systemet kan göras av hur stora insignaler som är möjliga.

(c) Nackdelen med förslaget i uppgiften är framförallt att x_2 måste deriveras. Dessutom tas inte hänsyn till informationen insignalen $u(t)$.

(d) Använd en observatör där även hänsyn tas till skattningsfelet:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

Observatörens K-matris måste beräknas så att egenvärdena till

$$(A - KC)$$

placeras i vänster halvplan. Slutligen bildas återkopplingen som

$$u = -L\hat{x} + r$$

5. (a) Från robusthetskriteriet har vi att $|G_c(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta G(i\omega)|}$ för alla ω. Insättning ger $|G_c(i\omega)| < \frac{1}{|\alpha|}$. Då $|\alpha| < 0.5$ är $|G_c(i\omega)| < \frac{1}{0.5}$ ett krav för stabilitet.

(b)

$$\begin{aligned}
|G_c(i\omega)| &= \left|\frac{G^O(i\omega)}{1+G^O(i\omega)}\right| = \left|\frac{\frac{-1}{A_m}}{1+\frac{-1}{A_m}}\right| = \left|\frac{-1}{A_m-1}\right| \\
&= \frac{1}{A_m-1} < \frac{1}{0.5} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < A_m - 1 \Leftrightarrow A_m > \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
G^O(i\omega) &= G(i\omega)e^{i\phi(\omega)} = G(i\omega)\left(1+\Delta G(\omega)\right) \\
&\Rightarrow \quad \Delta G(i\omega) = e^{i\phi(\omega)} - 1 = \underbrace{\cos(\phi(\omega)) + i\sin(\phi(\omega))}_{\text{Eulers formel}} - 1 \\
|\Delta G(i\omega)| &= \sqrt{(\cos(\phi(\omega))-1)^2 + \sin^2(\phi(\omega))} \\
&= \sqrt{\cos^2(\phi(\omega)) - 2\cos(\phi(\omega)) + 1\sin^2(\phi(\omega))} \\
&= \sqrt{2-2\cos(\phi(\omega))}
\end{aligned}$$

(d) Robusthetskriteriet ger, tillsammans med uppgift (c), att

$$|G_c(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta G(i\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{2-2\cos(\phi(i\omega))}}$$

för alla ω. $\frac{1}{\sqrt{2-2\cos(\phi(i\omega))}}$ är minimal då $\cos(\phi(i\omega)) = -1$, vilket ger $|G_c(i\omega)| < \frac{1}{2}$.

Felkoefficienten ges av $e_0 = 1 - |G_c(0)|$, vilket leder till att $e_0 > 1 - 0.5 = 0.5$ om kravet uppfylls.