Lösningar till tentamen i Reglerteknik

Tentamensdatum: 23 oktober 2015

1. (a) För ett andra ordningens system på formen

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

är w_0 starkt kopplad till systemets snabbhet. Ett större ω_0 ger en kortare stigtid. Den relativa dämpningen ζ avgör hur oscillativt systemet är. Ett mindre ζ ger större överläng. Om vi börjar med att titta på snabbheten går det således att para ihop stegsvar A,D med system (iii),(iv) och B,C med (i),(ii). Om vi istället tittar på dämpningen går det att para ihop stegsvar A,C med (ii),(iv) och B,D med (i),(iii). Den sammansatta ihopparningen blir alltså A-(iv), B-(i), C-(ii) och D-(iii).

(b) Stigtiden hos stegsvaret är inverst proportionellt mot systemets bandbredd $|G(iw_B)| = 1/\sqrt{2}$ och översläng i stegsvaret är ekvivalent med resonanstoppar i amplitudkurvan till $G(s)$. C är det klart långsammaste stegsvaret och måste därför tillhöra II då den har klart lägst bandbredd, C-II. Övriga stegsvar är likvärdigt snabba men har olika översläng. Störst översläng har B som således borde tillhöra III som har klart störst resonanstopp, B-III. A-IV då den saknar översläng (resonanstopp) och slutligen tillhör D-I då det finns en liten översläng (resonanstopp). Sammanfattningsvis A-IV, B-II, C-II och D-I.

(c) Systemet har två poler i -1 (egenvärdena till A matrisen) och är således stabilt. Statisk förstärkning kan erhållas genom att exempelvis undersöka stationaritet vid ett steg, sätt $u = 1$ och $\dot{x} = 0$ som ger $y = x_1 = 1$, alltså är statisk förstärkning $G(0) = \lim_{t\to\infty} y(t)/u(t) = 1$. Alternativt kan man beräkna $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ och från detta $G(0)$ som ger samma svar.

2. (a) Känslighetsfunktionen ges av

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)F(s)} = \frac{(Ts+1)^2(\tau_I s + \gamma)}{(Ts+1)^2(\tau_I s + \gamma) + k_0 K(\tau_I s + 1)}$$

(b) Kravet på känslighetsfunktionens statiska förstärkning blir därmed

$$S(0) = \lim_{s \to 0} \frac{(Ts+1)^2(\tau_I s + \gamma)}{(Ts+1)^2(\tau_I s + \gamma) + k_0 K(\tau_I s + 1)} \to \frac{\gamma}{\gamma + k_0 K} < \epsilon$$

Felet minskar med minskande γ och med ökande K (givet att stabiliteten bibehålls).

(c) Det slutna systemets karakteristiska ekvation ges av

$$1 + G(s)F(s) = 0 \Leftrightarrow (Ts+1)^2(\tau_I s + \gamma) + k_0 K(\tau_I s + 1) = 0 \tag{1}$$

(d) Med $k_0 = 1$, $T = 1/2$, $\gamma = 0$ samt $\tau_I = 1$ kan den karakteristiska ekvationen (1) skrivas

$$P(s) + KQ(s) = (s/2+1)^2 s + K(s/2+1) = 0. \tag{2}$$

För $K = 0$ kommer rötterna att ligga i rötterna till $P(s)$ alltså -2,-2 samt 0. För stora K kommer en rot att hamna i roten till $Q(s)$ alltså $s = -2$. För stora K kommer vi även få $n = 3 - 1 = 2$ asymptoter med riktningarna $\pi/2$ och $3\pi/2$. Alla rötter förblir i vänster halvplan. Två av rötterna kommer att få stor imaginärdel relativt realdelen, d v s det återkopplade systemet kommer att bli oscillativt.

3. (a) Enligt bodediagrammet för $G(iw)$ har det öppna systemet med $F = 1$ en skärfrekvens $\omega_c \approx 9\,rad/s$ och en fasmarginal $\varphi_m \approx 53°$.

(b) För att uppfylla önskade krav på vårt slutna system väljer vi att designa en lead-lag regulator enligt kursboken. För att halvera stigtiden utan ökad överslång (jämfört med i a-uppgiften) fås följande ekvivalenta kraven på G_o,

$$\omega_{c,d} = 18\,\text{rad/s}, \qquad \varphi_{m,d} = 53°.$$

Vid denna önskade skärfrekvens har vi en fasmarginal på 23°. Det gör att vår fasavancerande länk behöver designas så att vi ökar fasen vid skärfrekvensen (med beaktande att vi eventuellt kommer behöva en Lag-länk) med

$$\varphi_{max} = 53° - 23° + 6° = 36°$$

Från figur 5.13 i kursboken väljs således $\beta \approx 0.27$. För att få önskad skärfrekvens väljs K så att följande uttryck håller

$$|F_{lead}(i\omega_{c,d})||G(i\omega_{c,d})| = 1 \Leftrightarrow \frac{K}{\sqrt{\beta}}0.37 = 1 \Leftrightarrow K = \frac{\sqrt{\beta}}{0.37} \approx 1.4$$

För att få maximal fasavancering vid den önskade skärfrekvensen väljs

$$\tau_d = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} \approx 0.11$$

Vi fortsätter med att undersöka om vi uppfyller kraven på det stationära reglerfelet vid ett steg.

$$e_0 = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+F(s)G(s)}\frac{1}{s} = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} F(s)G(s)} = \frac{1}{1+\frac{K}{\gamma}\infty} = 0,$$

Således är kravet på stationärt reglerfel vid ett steg uppfyllt för alla γ. Går vi vidare och undersöker stationärt reglerfel vid en ramp fås

$$e_1 = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+F(s)G(s)}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sF(s)G(s)} = \frac{1}{\frac{10K}{\gamma}} < 0.01 \Leftrightarrow \gamma < 0.1K \approx 0.144.$$

Vi kan således välja $0 \leq \gamma \leq 0.14$ för att uppfylla kravet på e_1. Slutligen väljs $\tau_I = \frac{10}{\omega_{c,d}} = 0.56$ enligt tumregel så att Lag-länken ger en fasretardation på ungefär 6°. Om vi väljer $\gamma = 0$ fås den slutgiltiga regulator

$$F = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_d s + 1}\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma} = 1.4\frac{0.11s + 1}{0.27 \cdot 0.11s + 1}\frac{0.56s + 1}{0.56s}. \tag{3}$$

(c) Med regulatorn (3) har systemet en fasmarginal $\varphi_m = 53°$ och en skärfrekvens $\omega_c = 18\,\text{rad/s}$, figur 5.11 och 5.12 från Glad&Ljung ger $\zeta = 0.55$ och

$$M \approx 12\%,$$
$$\omega_c T_r = 1.3 \Rightarrow T_r = 1.3/18 = 0.07s.$$

4. (a) De angivna tillståndsvariablerna ger tillståndsekvationerna

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad \dot{x}_2(t) = -\frac{f}{J}x_2(t) + \frac{1}{J}u(t)$$

vilket på matrisform ger

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -f/J \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/J \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

(b) Med $J = 1$ och $f = 1$ och återkopplingen

$$u(t) = -Lx(t) + r(t)$$

fås det återkopplade systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r(t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -1 - l_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r(t) \end{aligned}$$

Det slutna systemets egenvärden fås ur den karakteristiska ekvationen

$$\det(\lambda \cdot I - (A - BL)) = \lambda^2 + (1 + l_2)\lambda + l_1 = 0$$

Vi önskar placera polerna i $-\mu$, dvs vi jämför med ekvationen

$$0 = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \mu^2$$

En jämförelse mellan ekvationerna ger $l_2 = 2\mu - 1$ och $l_1 = \mu^2$.

Återkopplingen ges alltså av:

$$u(t) = -(\mu^2 \quad 2\mu - 1)x(t) + r(t)$$

(c) Det återkopplade systemets överföringsfunktion ges av

$$G(s) = C(sI - A + BL)^{-1}B$$

vilket efter lite räkningar ger

$$G(s) = \frac{1}{(s + \mu)^2}.$$

(d) För ett system med två komplexa poler ges stigtiden av (Glad&Ljung sid. 65) $T_r \approx \frac{1}{\omega_0} e^{\phi/\tan\phi}$. I detta fall är $\phi = 0$ och $\omega_0 = \mu$ vilket innebär att $T_r = \frac{1}{\mu}e^1$ (enligt standard gränsvärde). Med $\mu = 2.7$ fås stigtiden till $T_r \approx 1$.

5. (a) Använder vi ekvation 6.6 ur Glad&Ljung får vi

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s)) = \frac{1}{(1+s)}\left(1 + \frac{-\delta s}{(1+\delta)s+1}\right) = \frac{1}{(1+\delta)s+1}, \tag{4}$$

vilket stämmer.

(b) Enligt Robusthetskriteriet kan stabilitet garanteras om

$$\mid T(i\omega) \mid < \frac{1}{\mid \Delta_G(i\omega) \mid} \quad \forall \omega$$

där, i detta fall, $\mid T(i\omega) \mid = \mid G_C(i\omega) \mid$ är given i figuren. För att kunna jämföra med den givna bodeplotten undersöker vi inversen

$$\frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} = \frac{\sqrt{(1+\delta)^2\omega^2+1}}{\omega\delta} \tag{5}$$

vilket är avtagande och har gränsvärdet

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} = \frac{1+\delta}{\delta} \tag{6}$$

som blir som minst 3 för $\delta = 0.5$. Kurvan $\mid G_C(i\omega) \mid$ har ett maximum $|G_c(i1.5)| \approx 1.2 = 6/5$. Alltså skär inte kurvorna varandra för något ω. Emma och Ivar kan vara fortsatt lugna.

(c) Den karakteristiska ekvationen för det återkopplade systemet ges av

$$1 + F(s) \cdot G^0(s) = 0 \Rightarrow \tag{7}$$
$$(1+\delta)s^2 + 2s + 4 = 0 \tag{8}$$

Då $\delta > 0$ går denna ekvation skrivas om som

$$s^2 + \frac{2}{(1+\delta)}s + \frac{4}{(1+\delta)} = 0 \tag{9}$$

Inför variabelbytet $a = \frac{1}{1+\delta}$. $\delta > 0$ blir således ekvivalent med att undersöka $0 < a < 1$ och (9) får det enklare utseendet

$$s^2 + 2as + 4a = 0$$

som för $0 < a < 1$ har lösningarna

$$s = -a \pm i\sqrt{a(4-a)}$$

och vi kan dra slutsatsen att vi inte får några instabila poler till G_c för $0 < a < 1 \Leftrightarrow \delta > 0$.