Lösningar till tentamen i Reglerteknik

Tentamensdatum: 8 Juni 2015

1. (a) Välj t.ex. styrbar kanonisk form

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

(b) Stabilt system och stationär förstärkning $G(0) = 5$ ger

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 3 \cdot 5 = 15.$$

(c) Inverkan av störningar på utsignalen skulle kunna göras väldigt liten. Också inverkan av modellfel på utsignalen minskas.

(d) Inför variabenn Z vid utgången av G_1. Vi har då att:

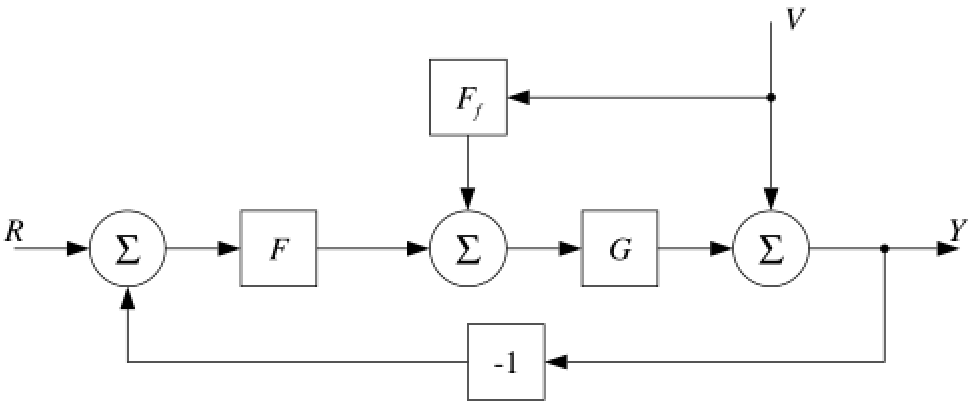
$$Z = G_1 \left(F_2 Y + R + F_1 Z\right) \tag{1a}$$
$$\Longleftrightarrow Z = \frac{G_1 F_2}{1 - G_1 F_1} Y + \frac{G_1}{1 - G_1 F_1} R. \tag{1b}$$

Dessutom gäller att $Y = G_2 Z$. Substitution med (1) ger då

$$\begin{aligned} & Y = G_2 Z \\ \Longleftrightarrow\ & Y \left(1 - \frac{G_2 G_1 F_2}{1 - G_1 F_1}\right) = \frac{G_2 G_1}{1 - G_1 F_1} R \\ \Longleftrightarrow\ & Y = \frac{G_2 G_1}{1 - G_1 F_1 - G_2 G_1 F_2} R. \end{aligned}$$

Överföringsfunktionen från R till Y ges av det sista uttrycket ovan.

2. (a) Använd framkoppling. Blockschema:



Superpositionsprincipen ger att vi kan negligera R och återkopplingen,

$$\begin{aligned} Y &= V + G F_f V \\ &= (1 + G F_f) V = 0\ \forall V \\ \Longleftrightarrow F_f &= -\frac{1}{G} = -\frac{s+2}{s}. \end{aligned}$$

Svar: $F_f(s) = -\frac{s+2}{s}$

(b) Regulatorn som ger känslighetsfunktion nr 3 är att föredra eftersom den har lägst belopp för frekvensen 20 rad/s.

Svar: Nr. 3

(c) Ur bodediagrammet fås att systemet är stabilt $\Rightarrow$ alternativ (a) uteslutet samt att öppna systemet innehåller en integration (lutning -1 för små ω) $\Rightarrow$ inget stationärt fel $\Rightarrow$ alternativ (b).

Svar: Alternativ (b).

(d) För $K = 0$ har systemet två poler i VHP och en i origo. Då K ökar blir systemet oscillativt för att sedan bli instabilt.

(a) och (e) är instabila $\Rightarrow$ poler i HHP. I (e) växer $y(t)$ snabbare än i (a) $\Rightarrow$ polen längre ut i HHP. Alltså (a): $K = 50$, (e): $K = 60$.

(c) har en pol nära origo efterom det är långsamt $\Rightarrow K = 1$.

(b) och (d) är båda oscillativa men i (d) är slängigheten större $\Rightarrow$ pol nära imaginära axeln. Alltså (b): $K = 6$, (d): $K = 30$.

Svar: (a): $K = 50$, (b): $K = 6$, (c): $K = 1$, (d): $K = 30$,
(e): $K = 60$

3. Vi har följande krav på regulatorn:

(a) Önskad fasmarginal: $\varphi_{m,d} = 40°$.

(b) Önskad skärfrekvens: Identifiera den skärfrekvens som med enbart P-reglering ger 40° fasmarginal, och välj $\omega_{c,d}$ till det dubbla.

(c) Stationärt fel: Identifiera det stationära fel som enbart P-reglering (med fasmarginal $\varphi_{m,d} = 40°$) ger då referenssignalen är en ramp, $R(s) = A/s^2$. Det stationära felet ska vara 100 gånger mindre.

Utifrån dessa krav, är det rimligt att designa en lead-lag regulator på formen

$$F_{\text{LeadLag}}(s) = F_{\text{lead}} F_{\text{lag}}, \tag{2a}$$

$$F_{\text{lead}}(s) = K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1}, \tag{2b}$$

$$F_{\text{lag}}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}. \tag{2c}$$

(Vi kan dock ännu inte veta om vi behöver både F_{lead} och F_{lag}.)

För att specificera kraven på skärfrekvens och stationärt fel, börja med att designa en P-regulator, $F_p = K_p$, med det enda kravet att dess fasmarginal ska vara 40°.

Systemet med integratorn ges av $G(s) = G_1(s)\frac{1}{s}$ och $\arg(G(i\omega)) = \arg(G_1(i\omega)) - 90°$. Faskurvan för $G(i\omega)$ fås genom att utgå ifrån faskurvan för $G_1(i\omega)$ och skifta ned den 90°.

P-Regulator och specificering av krav för Lead-Lag regulator: Med P-regulatorn F_p ges det öppna systemets faskurva av $\arg(F_p G(i\omega)) = \arg(G(i\omega)) = \arg(G_1(i\omega)) - 90°$. Välj skärfrekvensen ω_c så att

$$\begin{aligned}
&\arg(F_p G(i\omega_c)) = -180° + \varphi_{m,d}, \\
\iff\ &\arg(G_1(i\omega_c) - 90° = -180° + \varphi_{m,d}, \\
\iff\ &\arg(G_1(i\omega_c) = -50°.
\end{aligned}$$

Avläsning ger $\omega_{c,p} = 1.5$ rad/s för reglering med F_p. För att realisera $\omega_c = 1.5$ rad/s ska K väljas så att

$$|K_p G_1(i\omega_c) \frac{1}{i\omega_{c,p}}| = 1.$$

Avläsning ger $|G_1(1.5i)| = 0.3$, vilket ger $K_p = 10$. Snabbetskravet på systemet reglerat med F_{LeadLag} kan nu utryckas som att den önskade skärfrekvensen är den dubbla, dvs. $\omega_{c,d} = 3$ rad/s.

Det stationära felet då systemet regleras med F_p och insignalen är en ramp ges av $\lim_{t\to\infty} r(t) -$

$y(t)$. Regulatordesignen syftar till att ge ett stabilt återkopplat system, så slutvärdesteoremet kan användas:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} r(t) - y(t) = \lim_{s\to 0} s(R(s) - Y(s)) \\
&= \lim_{s\to 0} s\left(R(s) - \frac{FG_1(s)\frac{1}{s}}{1 + FG_1(s)\frac{1}{s}} R(s)\right) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{s}{1 + FG_1(s)\frac{1}{s}} R(s),\ (R(s) = A/s^2) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{A}{s + FG_1(s)} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{A}{K_p G_1(s)}
\end{aligned}$$

då $F = F_p = K_p$.

Lead-Lag regulator: Kraven för får Lead-Lag regulator är specificerade till:

(a) $\varphi_{m,d} = 40°$,

(b) $\omega_{c,d} = 3$ rad/s,

(c) $e_1 \leq \lim_{s\to 0} \frac{1}{100} \frac{A}{K_p G_1(s)}$.

Fasavancerande länk:

$$F_{lead} = K \cdot \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1}$$

Avläsning ger att $\arg(G_1(i\omega_{c,d})) = -100°$, därmed är $\varphi_m = 180 + \arg(G(i\omega_{c,d})) = -10°$.

Med kännedom om att vi kan komma att behöva en F_{lag}-länk så behöver F_{lead} avancera fasen med $40° - \varphi_m + 6° = 56°$, där $6°$ kompenserar för F_{lag}-länken. Ur Figur 5.13 i kursboken kan avläsas att $\beta = 0.09$ ger önskad fasavancering. τ_D kan därefter bestämmas med $\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} = 1.11$. Förstärkningen K bestäms från

$$\frac{K}{\sqrt{\beta}} \left| G_1(i\omega_{c,d}) \frac{1}{i\omega_{c,d}} \right| = 1.$$

Med avläsningen $|G_1(i\omega_{c,d}| = 0.08$ fås $K = 11.25$.

Integrerande del och stationärt fel:

Uttrycket för det stationära felet som härleddes tidigare gäller också här om vi låter $F = F_{lead} F_{lag}$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} r(t) - y(t) = \lim_{s\to 0} s(R(s) - Y(s)) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{A}{s + F_{lead} F_{lag} G_1(s)}.
\end{aligned}$$

Vi har $\lim_{s\to 0} F_{lead} = K$, samt $\lim_{s\to 0} F_{lag} = 1/\gamma$, som insatt i uttrycket ovan ger

$$\lim_{t\to\infty} r(t) - y(t) = \lim_{s\to 0} \frac{A}{\frac{K}{\gamma} G_1(s)}.$$

Kravet på stationärt fel blir

$$\lim_{s\to 0} \frac{A}{\frac{K_{\text{LeadLag}}}{\gamma} G_1(s)} < \lim_{s\to 0} \frac{1}{100} \frac{A}{K_p G_1(s)}.$$

Med nummeriska värden insatta samt förkortningar fås $\gamma < 0.0113$.

Sammanfattningsvis så kan vi säga att en Lead-Lag regulator enligt ekvation (2) har designats. Parametrarna har bestämts så att systemet uppfyller de ställda kraven. Både F_{Lead} och F_{Lag} behövs.

4. (a) $e_i = 1$ ger $u_i = u_{max}$, men om $e = e_1 + e_2 = 2$ fås $u = u_{max} \neq u_1 + u_2$

   (b) För att få reglerfel noll behövs en ren integration i systemet, därför väljer vi en PI-regulator, eftersom det ursprungliga suýstemet inte har någon.

   (c) (i) Bodediagrammet räcker, en tidsfördröjning sänker faskurvan, så man behöver kolla hur mycket sänkning som kan göras innan fasmarginalen blir negativ.

5. (a) $u(t) = -Lx(t) + l_0 r(t) \Rightarrow$ Återkopplade systemet:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = (A - BL)x(t) + Bl_0 r(t) \\ &y = Cx \end{aligned}$$

   Slutna systemets poler $\Leftrightarrow$ egenvärden till $(A - BL)$:

$$A - BL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (l_1 \ l_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -l_2 \end{pmatrix}$$

   Kar.ekv.:

$$\det(sI - (A - BL)) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ l_1 & s + l_2 \end{vmatrix} = s^2 + l_2 s + l_1 = 0$$

   Önskad kar.ekv.: $(s + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow s^2 + 4s + 4 = 0$

   Jämförelse ger $l_1 = l_2 = 4$.

   <u>Svar:</u> $u(t) = -(4 \ 4)x(t) + l_0 r(t)$

   (b) $u(t) = -L \cdot Kx(t) + l_0 r(t) \Rightarrow$ Återkopplade systemet:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = (A - K \cdot BL)x(t) + Bl_0 r(t) \\ &y = Cx \end{aligned}$$

   Slutna systemets poler $\Leftrightarrow$ egenvärden till $(A - K \cdot BL)$:

$$A - K \cdot BL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - K \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (4 \ 4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4K & -4K \end{pmatrix}$$

   Kar.ekv.:

$$\det(sI - (A - K \cdot BL)) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 4K & s + 4K \end{vmatrix} = s^2 + 4Ks + 4K = 0$$

$$\Rightarrow s = -2K \pm \sqrt{4K^2 - 4K} = -2K \pm 2\sqrt{K(K - 1)}$$

   För $K = 0$ fås en dubbelpol i origo. Detta motsvarar ett instabilt system, en dubbelintegrator (utan svängningar).

   $\text{Re}\{s\} < 0$ för alla $K > 0$ eftersom $\sqrt{K^2 - K} < K \Rightarrow$ stabilt för alla $K > 0$.

   $\text{Re}\{s\} \neq 0$ för alla $K > 0 \Rightarrow$ självsvängning saknas eftersom rent imaginära rötter saknas. (Även för $K = 0$ har vi konstaterat att systemet inte självsvänger.)

   Systemet är oscillativt då rötterna är komplexa dvs då $K(K - 1) < 0 \Rightarrow K < 1$.

   <u>Svar:</u> Det finns inget värde på K så att självsvängning fås. Stegsvaret uppvisar svängningar då $0 < K < 1$. Systemet är stabilt för alla $K > 0$.

   (c) Observerbarhetsmatrisen,

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

har full rang ($\det(\mathcal{O}) \neq 0$), således är systemet observerbart och observatörens poler kan placeras godtyckligt.

Observatörens poler ska placeras i VHP så att skattningsfelet avtar med tiden. Placerar man observatörspolerna för långt in i vänster halvplan så riskerar man att förstärka inverkan av mätbrus på styrsignalen. Å andra sidan så vill man att tillståndsskattningen ska konvergera någorlunda snabbt och därför inte ha polerna för nära imaginära axeln. En tumregel är att placera observatörens poler till vänster om det återkopplade systemets poler för att inte observatören ska göra det återkopplade systemet långsammare. I detta fall kan vi t.ex. välja att placera båda observatörspolerna i -3.