Lösningar till tentamen i Reglerteknik M

Tentamensdatum: 2015-04-07

1. (a) Om mjölken blir för varm kokar den över. Det är rimlig att anta att temperaturen bör mätas, dvs $y(t)$=uppmätt temperatur i mjölken. Referenssignalen $r(t)$ bör vara en önskad temperatur som lämpligen är mjölkens koktemperatur, insignalen eller styrsignalen $u(t)$ är värmetillförseln, typiskt effekt tillförd spisplattan. Vi bör alltså bygga en apparat som kontinuerligt mäter skillnaden mellan konstanten $r(t)$ och mjölktemperaturen $y(t)$, och baserat på det beräknar hur mycket effekt som skall tillföras spisplattan. Enklast möjligt är en P-regulator $u(t) = K(r(t) - y(t))$. Överslängen får inte överskrida den kritiska temperaturen då mjölken kokar över, stationära felet kan avvika något från önskat värde, men om det är positivt får det inte överskrida den kritiska överkokningstemperaturen och det fåre naturligtvis inte vara så så stort att mjölken inte kokar.

   (b) Modellens överföringsfunktion är

   $$Y(s) = \frac{1}{s^2 + s + k} U(s)$$

   jämför med andra ordningens standard uttryck

   $$Y(s) = K \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} U(s)$$

   och identifiera statiska förstärkningen $K = 0.2$ i bilden. Det ger $\omega_0^2 = 1/K = k = 5$. Alternativt, statiskt så gäller att $ky(t) = u(t)$ vilket med $u(t) = 1$ ger att $k = 5$. Lågförstärkningssatsen kan också användas, och ger naturligtvis samma resultat.

   (c) Systemen B och C har en pol i origo (lågfrekvensasymptotlutning -1 och fas -90^o), det ger att det slutna systemet har statisk förstärkning 1, jämför systemen 1 och 2. System C har lägre fasmarginal än B, vilket ger upphov till en överläng som i plot 1, dvs 1C och 2B. System D har låg fasmarginal vilket ger översläng, dvs 4D och 3A.

   (d) Insignalen har frekvensen ω=1. Sinus-in sinus-ut principen ger utsignalen

   $$y(t) = |G(i)| \sin(t + \arg G(i)).$$

   Vi får $|G(i)| = \left|\frac{i^2+1}{i^2+2i+1}\right| = 0$. Sålunda följer att utsignalen blir 0 då transienter försvunnit.

2. (a) PD-regulatorn som används kan ses som en regulator med två frihetsgrader där $F_r = 1$ och $F_y = K_P + K_D s$. Överföringsfunktionen för det slutna systemet är således

   $$\frac{F_r(s)G(s)}{1 + F_y(s)G(s)}$$

   och den karakteristiska ekvationen blir alltså $s^2 + s(K_D + 1) + K_P = 0$.

   (b) För att få det slutna systemets poler i -1 skall den karakteristiska ekvationenska vara $(s+1)^2 = 0$. Man skall således välja $K_D = 1$ och $K_P = 1$.

   (c) Det relativa modellfelet ges av

   $$\Delta G(s) = \frac{G_0(s) - G(s)}{G(s)} = \frac{\frac{\alpha}{s(s+1)} - \frac{1}{s(s+1)}}{\frac{1}{s(s+1)}} = -1 + \alpha$$

   Den komplementära känslighetsfunktionen ges av

   $$T(s) = \frac{F_y(s)G(s)}{1 + F_y(s)G(s)} = \frac{1}{s+1}$$

   Robusthetskriteriet säger att det sanna slutna systemet är stabilt om

   $$\|\Delta G(iw)\| < \frac{1}{\|T(iw)\|} \forall w$$

   eftersom $\frac{1}{\|T(iw)\|} \geq 1$ blir stabilitet villkoret

   $$\|\Delta G(iw)\| < 1$$

   vilket betyder att det sanna systemet är stabilt enligt robusthetskriteriet när $0 < \alpha < 2$.

(d) Den karaktäristiska ekvationen för det sanna slutna systemet är

$$s^2 + s(\alpha + 1) + \alpha = 0$$

Det sanna slutna systemet är stabilt om dess poler har negativa real del, vilket de har om $\alpha > 0$.

3. (a) $\beta = 0.1$ i lead-länken ger en fasökning på cirka 55^o ur figur 5.13 eller ekvation (5.4) i boken (Glad, Ljung: Reglerteknik. Grundläggande teori,2007). Då reglersystemet är asymptotiskt stabilt för fasmarginal $\Phi_m > 0^o$, fås skärfrekvensen ur Bodediagrammet (medföljer uppgiften) som frekvensen där fasen är $-180^o - 55^o = -235^o$. Max skärfrekvens är ungefär $\omega_c = 20$ rad/s.

(b) Vi designar en lead-lag-regulator. För att få stationära felet noll behövs en integration i kretsförstärkningen. Då systemet redan innehåller en integration, behövs ingen lag-länk, och skall således ej användas om enklast möjliga regulator sökes. Lead-länken har utseendet

$$F(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}$$

För att få fasmarginalen 45^o vid önskad skärfrekvens $\omega_c = 10$ rad/s ser vi ur Bodediagrammet att en fasökning på 45^o behövs. Att detta uppfylls för $\beta = 0.17$ ges av figur 5.13 i boken. Parametern τ_D i lead-länken fås ur eqkvation (5.5) i boken

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{10\sqrt{1.7}} \approx 0.24.$$

Konstanten K bestäms ur villkoret

$$|G_o(i\omega_c)| = |F(i\omega_c)||G(i\omega_c)| = 1$$

vid önskad skärfrekvens. $|G(i10)| = 0.2$ (eller avläs approximativt ur Bodediagrammet). $|F(i10)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}$ enligt boken. Detta ger $K \approx 2.06$.

4. (a) Eftersom tillståndsbeskrivningen är minimal ges systemets poler av A-matrisens egenvärden, $0 = det(sI - A) = s^2 - 10 \Rightarrow s = \pm\sqrt{10}$

(b) Med $L = [l_1\; l_2]$ ges den karakteristiska ekvationen av $0 = det(sI - A + \alpha BL) = det\begin{pmatrix} s & -1 \\ -10 + \alpha l_1 & s + \alpha l_2 \end{pmatrix}$ $= s^2 + \alpha l_2 s - 10 + \alpha l_1$.

(c) Med $\alpha = 1$ fås karakteristiska ekvationen $0 = s^2 + l_2 s - 10 + l_1$ som för poler i -1 önskas vara $0 = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$. Identifiering ger $L = [11\; 2]$.

(d) Det återkopplade systemet är asymptotiskt stabilt omm dess poler, givna av karakteristiska ekvationen ($0 = s^2 + \alpha l_2 s - 10 + \alpha l1$), ligger i vhp. För ett andra ordningens polynoam är detta ekvivalent med att alla koefficienter är positiva. Vi får således kravet att $-10 + \alpha l1 > 0$. För den valda återkopplingen erhålls alltså stabilitet så länge som $\alpha > 10/11$.

5. (a) Vi har $Y(s) = \frac{1}{s}Y_a(s) = \frac{1}{s}G_1(s)(U(s) - \alpha Y_a(s))$. Med $U(s) = K(R(s) - Y(s))$ och $Y_A(s) = sY(s)$ får vi $Y(s) = \frac{1}{s}G_1(s)(K(R(s) - Y(s)) - \alpha sY(s))$. Vi bryter ut $Y(s)$ och får

$$Y(s) = \frac{G_1(s)K}{s(1 + G_1(s)\alpha) + G_1(s)K}R(s) = \frac{K}{s^3 + s^2 + \alpha s + K}R(s)$$

(b) Styrsignalen som går in i $G_s(s)$ ges av $U(s) = K(R(s) - Y(s)) - \alpha Y_a(s)$. Ur schemat har vi $Y_A(s) = sY(s)$. Vi har alltså $U(s) = K(R(s) - Y(s)) - \alpha sY(s)$. Uppsamling av termer i önskad form ger $U(s) = KR(s) - (K + \alpha s)Y(s)$. Uppställningen är alltså ett sätt att implementera en PD-liknande regulator där man inte deriverar referenssignalen. Samma regulatortyp användes i uppgift 2.

(c) Från blockschemat har vi $Y(s) = \frac{1}{s}Y_a(s)$ och $Y_a(s) = \frac{1}{s(s+1)}U(s)$. Låt $X_1(s) = Y(s), X_2(s) = Y_a(s)$ och $X_3(s) = \frac{1}{(s+1)}U(s)$ och vi har $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$ och $\dot{x}_3 + x_3 = u$. Insättning av styrlag ger $\dot{x}_3 + x_3 = K(r - x_1) - \alpha x_2$. Sammanställning i matrisform ger

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K & -\alpha & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$