Lösningar till tentamen i Reglerteknik

Tentamensdatum: 16 Mars 2015

1. (a) Systemet är stabilt (pol i $s = -2$). Utsignalen då insignalen är en sinus kommer då också bli en sinus med samma frekvens, men amplitudskalad och fasförskjuten enligt

$$y(t) = |G(i\omega| \sin(\omega t + \phi),$$
$$\phi = arg(G(i\omega)).$$

(Ekvation 4.2 i kursboken.) Här har vi frekvensen $\omega = 2rad/s$ vilket ger $|G(2i)| = |\frac{2}{2i+2}| = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2}} = 1/\sqrt{2}$, samt $arg(G(2i)) = -\arctan(2/2) = -\pi/4$. Alltså, $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2t - \pi/4)$.

   (b) Modellfel, störningar och begräsaningar i styrsignal.

   (c) Följande figurer hör ihop: A-4, B-6, C-3, D-5, E-2, F-1

   - Figur B: Poler i VHP - stabilt. Nollställe i HHP - icke minimumfas. Det svarar mot Figur 6 som är icke minimumfas efterssom utsignalen initialt går åt fel håll.
   - Figur D: Två komplexvärda poler i HHP - instabilt och oscillativt. Det svarar mot Figur 5.
   - Figur C och F: Båda systemen har enbart reella poler i VHP, vi kan alltså inte vänta oss några oscillationer. Figur C har sin pol längre in i VHP och ska därför ha ett snabbare stegsvar. Figur 1 och 3 visar båda stegsvar utan oscillationer, men stegsvaret i Figur 3 är snabbare. Vi har alltså C-3 och F-1.
   - Figur A, E: Båda figurerna har komplexkonjugerade polpar i VHP, men Figur E har sina poler längre från origo, och med högre relativ dämpning. Båda stegsvaren bör vara något oscillativa, men stabila. Men stegsvaret för E bör ha kortare stigtid och mindre översläng. Vi får därför E-2 och A-4.

2. (a) Återkoppling med en P-regulator kommer att skifta amplitudkurvan för kretsförstärkningen, men lämna faskurvan oförändrad. Figur 3 visar amplitud- och faskurvan för systemet G, vilket är detsamma som kretsförstärkningen FG om $F = 1$ (P-regulator med förstärkning $K = 1$). Avläsning ur Figur 3 ger att

   - fasskärfrekvensen $\omega_p = 2.3$, och
   - amplitudmarginalen $A_m = 1.25$ (förstärkningen är -2 dB vid ω_p).

   Återkoppling med P-regulator, förstärkning $K = 10$ bör ha gjort systemet instabilt efterssom amplitudmarginalen inte räcker till.

   (b) Den största förstärkningen i P-regulatorn som kan användas och bibehålla stabilitet är $K < A_m = 1.25$. För högre förstärkningar blir systemet instabilit.

   (c) Avläsning ur Figur 3 ger att

   - $\omega_c = 2rad/s$, samt
   - $\varphi_m = 5°$.

   Den önskade skärfrekvensen redan är uppnådd.

   Fasavancerande länk:

$$F_{lead} = K \cdot \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1}$$

   Med kännedom om att vi kan komma att behöva en F_{lag}-länk så behöver F_{lead} avancera fasen med $45° - \varphi_m + 6° = 46°$, där $6°$ kompenserar för F_{lag}-länken. Ur Figur 5.13 i kursboken kan avläsas att $\beta = 0.17$ ger önskad fasavancering. τ_D kan därefter bestämmas med $\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} = 1.21$.

Stationärt fel:

$$F_{lag} = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

Det stationära felet då referenssignalen är ett steg motsvaras av felkoefficienten e_0

$$e_0 = \lim_{s\to 0} S(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + F(s)G(s)}$$

För att kravet $e_0 = 0$ ska uppfyllas måste $\lim_{s\to 0} 1 + F(s)G(s) \to \infty$. Avläsning ur Figur 3 ger att $G(0) = 3.16$ ($= 10$ dB). Då $G(s)$ är begränsad måste

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0} F(s) \to \infty \\ \implies &\lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + F(s)G(s)} \to 0 \end{aligned}$$

Valet $\gamma = 0$ åstadkommer detta. Välj därefter $\tau_I = 10/\omega_c = 5$ som ger en fasminskning på bara 5.7° (enligt läroboken, kap. 5.4).

Slutligen ska vi välja K så att skärfrekvensen $\omega_c = 2rad/s$ bibehålls, dvs $|F(i\omega_c)G(i\omega_c| = 1$. Insättning av de parametrar som redan bestämts, samt avläsningen $|G(i\omega_c)| = 1$ ger

$$\begin{aligned} &|F(2i)G(2i| = 1 \\ \iff &K \cdot \frac{|1.21 \cdot 2i + 1|}{|0.17 \cdot 1.21 \cdot 2i + 1|} \frac{|5 \cdot 2i + 1|}{|5 \cdot 2i|} \cdot 1 = 1 \\ \iff &K = 0.41. \end{aligned}$$

Det fullständiga utrycket för regulatorn blir därmed

$$F(s) = 0.41 \cdot \frac{1.21s + 1}{0.17 \cdot 1.21s + 1} \frac{5s + 1}{5s}.$$

3. (a) Med $v = 0$ blir överföringsfunktionen från r till y

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} \cdot R(s) \\ &= \frac{\frac{1}{s(s+1)} \frac{s+1}{s+0.5}}{1 + \frac{1}{s(s+1)} \frac{s+1}{s+0.5}} \cdot R(s) \\ &= \frac{1}{s(s + 0.5) + 1} \cdot R(s) \\ &= \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1} \cdot R(s) \end{aligned}$$

Den karakteristiska ekvationens koefficienter är alla positiva. Rouths algoritm (läroboken, Appendix 2.A) ger då att rötterna har negativ realdel. Överföringsfunktionens poler är alltså i VHP och slutvärdessatsen gäller. Om r är ett enhetssteg så säger slutvärdessatsen att

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s(s + 0.5) + 1} \cdot \frac{1}{s} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) Med $r = 0$ blir överföringsfunktionen från v till y

$$
\begin{aligned}
&Y(s) = G(s)\left(V(s) - F(s)Y(s)\right) \\
\iff &Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)} \cdot V(s) \\
&= \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1 + \frac{1}{s(s+1)}\frac{s+1}{s+0.5}} \cdot V(s) \\
&= \frac{s+0.5}{s(s+1)(s+0.5)+(s+1)} \cdot V(s) \\
&= \frac{s+0.5}{(s+1)\left(s(s+0.5)+1\right)} \cdot V(s) \\
&= \frac{s+0.5}{(s+1)\left(s^2+0.5s+1\right)} \cdot V(s)
\end{aligned}
$$

Överföringsfunktionens poler är $s = -1$ samt samma två poler med negativ realdel som finns i $G_c(s)$ (Uppgift 3a). Systemet är stabilt och slutvärdessatsen gäller. Om v är ett enhetssteg så säger slutvärdessatsen att

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s+0.5}{(s+1)\left(s(s+0.5)+1\right)} \cdot \frac{1}{s} \\
&= 0.5.
\end{aligned}
$$

(c) Med $G^0(s) = G(s)(1+\gamma s)$ är det relativa modellfelet $\Delta_G(s) = \gamma s$. Robusthetskriteriet,

$$
\begin{aligned}
&|\Delta_G(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} \; \forall\omega \\
\iff &|T(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} \; \forall\omega,
\end{aligned}
$$

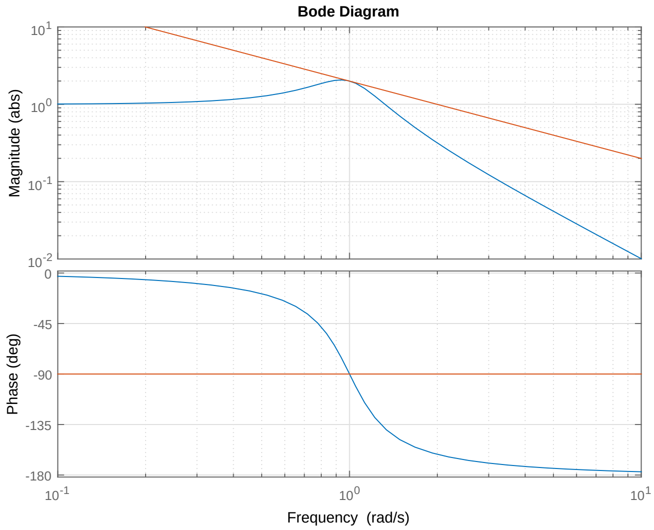
gäller om

- återkopplingen $F(s)$ stabiliserar $G(s)$,
- $G^0(s)$ har lika många poler i HHP som $G(s)$ samt om
- $F(s)G(s)$ och $F(s)G^0(s)$ går mot noll då $|s|$ går mot oändligheten.

Räkningarna i uppgift 3a) visade att $F(s)$ stabiliserar $G(s)$. Varken $G^0(s)$ eller $G(s)$ har någon pol i HHP. Produkten $F(s)G(s)$ har gradtal 1 i täljaren och 3 i nämnaren och går därför mot noll då $|s|$ går mot oändligheten. $F(s)G^0(s)$ har gradtal 2 i täljaren och 3 i nämnaren och går också mot noll då $|s|$ går mot oändligheten. Alla villkor för robushetskriteriet är därmed uppfyllda.

Robusthetskriteriet kan kontrolleras grafiskt i ett bodediagram. Beloppskurvan för $T(i\omega)$ ska då ligga under beloppskurvan för $1/\Delta_G(i\omega)$, $\forall\omega$. Ur figuren i tentan framgår ett maximum, $|T(i\omega)| = 2.1$ vid $\omega = 0.95 rad/s$. Det framgår också att högfrekvensasymptoten har lutningen -2 dekader per dekad. Ritar man in $\frac{1}{|\Delta_G(i\omega|}$ i bodediagrammet får man Figur 1 nedan. Kurvan för $\frac{1}{|\Delta_G(i\omega|}$ skiftas uppåt/nedåt för olika γ. Den har lutningen -1 dekader per dekad. Den frekvens som robusthetskriteriet först kommer att fallera för är vid frekvenstoppen för $T(i\omega)$, $\omega = 0.95 rad/s$. Robusthetskriteriet ger vid denna frekvens

$$
\begin{aligned}
&2.1 < \frac{1}{|\gamma i 0.95|} \\
\iff &\gamma < \frac{1}{2.1 \cdot 0.95} = 0.5.
\end{aligned}
$$



Figur 1: $T(i\omega)$ och $1/\Delta_G(i\omega)$.

4. (a) Egenvärdena för det slutna systemet ges av

$$
\begin{aligned}
&\det(\lambda I - (A - BL)) \\
&= \det\left(\lambda I - \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}\right)\right) \\
&= \det\left(\lambda I - \begin{pmatrix} -l_1 & 1 - l_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} \lambda + l_1 & l_2 - 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \\
&= \lambda^2 + l_1\lambda + l_2 - 1.
\end{aligned}
$$

För att få egenvärdena $\lambda = -1$ ska vi åstadkomma den karakteristiska ekvationen $(\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$ genom att välja l_1 och l_2. Identifiering ger $l_1 = 2$ och $l_2 = 2$.

Överföringsfunktionen för det slutna systemet ges då av

$$
\begin{aligned}
G_c(s) &= C(sI - (A - BL))^{-1} B l_r \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} l_r \\
&= \frac{l_r}{(s+1)^2}
\end{aligned}
$$

Den statiska förstärkningen av G_c är absolutbeloppet av $G_c(i\omega)$ vid frekvensen $\omega = 0$. Vi har att $G_c(0) = l_r$ och ska alltså välja $l_r = 1$ för att åstadkomma rätt statisk förstärkning.

(b) Överföringsfunktionen kan enligt ekvation (8.14) i kursboken skrivas som

$$
\begin{aligned}
G(s) &= C(sI - A)^{-1} B \\
&= \frac{1}{s(s+2)+1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{(s+1)^2}
\end{aligned}
$$

Systemet har en dubbelpol i -1. Nollställen saknas.

(c) Systemet är styrbart om styrbarhetsmatrisen har full rang, dvs

$$0 \neq \det\left(\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}\right).$$

Men

$$\det\left(\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Systemet är alltså inte styrbart.

5. (a) Att processen nästan självsvänger motsvarar en väldigt låg fasmarginal (φ_m) hos det öppna systemet $G_o(s) = F(s)G(s)$. Betrakta det öppna systemets förstärkning och fasförskjutning

$$\begin{aligned} |G_o(i\omega)| &= |F(i\omega)||G(i\omega)| \\ &= K|1 + \frac{K_I}{i\omega}||1 + K_D i\omega||G(i\omega)|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg(G_o(i\omega)) &= \arg(F(i\omega)) + \arg(G(i\omega)) \\ &= \arg(K) + \arg(1 + \frac{K_I}{i\omega}) + \arg(1 + K_D i\omega) + \arg(G(i\omega)). \end{aligned}$$

Men $\arg(K) = 0$ för alla rella $K > 0$. Justeringar av proportionalitetsförstärkningen K förskjuter amplitudkurvan för $G_o(i\omega)$ uppåt (öka K) eller nedåt (minska K), men faskurvan påverkas inte. Eftersom processen $G(s)$ har avtagande amplitud- och faskurvor så kommer en nedjustering av K att minska skärfrekvensen ω_c och öka fasmarginalen φ_m. Detta är vad Fasdottir gjorde för att få processen mer dämpad.

(b) Pillman justerade antingen K_I eller K_D så att processen blev snabbare (ökade skärfrekvensen ω_c) utan att dämpningen blev sämre (fasmarginalen φ_m oförändrad eller förbättrad). Utveckla uttrycket för fasförskjutning för $G_o(i\omega)$:

$$\begin{aligned} \arg(G_o(i\omega)) &= \arg(F(i\omega)) + \arg(G(i\omega)) \\ &= \arg(K) + \arg(1 + \frac{K_I}{i\omega}) + \arg(1 + K_D i\omega) + \arg(G(i\omega)) \\ &= \arg(\frac{i\omega + K_I}{i\omega}) + \arg(1 + K_D i\omega) + \arg(G(i\omega)) \\ &= \arg(i\omega + K_I) - \arg(i\omega) + \arg(1 + K_D i\omega) + \arg(G(i\omega)) \\ &= \arg(i\omega + K_I) - 90^\circ + \arg(1 + K_D i\omega) + \arg(G(i\omega)) \\ &= \arctan(\omega/K_I) + \arctan(K_D\omega) - 90^\circ + \arg(G(i\omega)) \end{aligned}$$

Vi har utnyttjat att $\arg(-i\omega) = -90^\circ$. Genom att studera hur $|G_o(i\omega)|$ och $\arg(G_o(i\omega))$ beror av K_I och K_D ser vi att:

- K_I: För en given frekvens, ω_0, kommer en ökning av K_I att öka förstärkningen $|G_0(i\omega_0)|$ ($\Rightarrow \omega_c$ ökar, snabbare process) men sänka fasen $\arg(G_0(i\omega_0))$ (försämrad fasmarginal!). Det senare följer av att arctan är en strikt växande funktion.
- K_D: För en given frekvens, ω_0, kommer en ökning av K_D att öka förstärkningen $|G_0(i\omega_0)|$ ($\Rightarrow \omega_c$ ökar, snabbare process) och öka fasen $\arg(G_0(i\omega_0))$. Fasmarginalen kommer att förändras på två sätt: Den förbättras efterssom hela faskurvan höjs. Men $G(i\omega)$ har avtagande faskurva, så $\arg(G(i\omega_c))$ avtar med ökande ω_c. Sammantaget kan vi inte säkert säga om φ_m har förbättrats, försämrats eller är oförändrad, eftersom det beror på hur snabbt $\arg(G(i\omega))$ avtar.

Pillman måste ha ökat K_D. Justeringar av K_I för att få ett snabbare system kommer säkert att försämra dämpningen. Däremot kan justeringar av K_D öka snabbheten utan att dämpningen försämras, givet att $\arg(G(i\omega))$ inte avtar för snabbt.