Lösningar till tentamen i TSRT19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2015-01-13

Johan Löfberg

1. (a) D-delen kan ibland behövs för att kunna stabilisera ett system. Den används även för att förbättra dämpningen i systemet. Nackdelen är att signalen som deriveras kan innehålla högfrekventa komponeter (snabbt varierande referenssignal, högfrekvent brus) vilket betyder att styrsignalen kan bli stor och/eller ändra sig olämpligt snabbt.

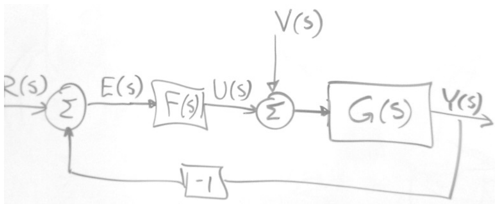
   (b) Lösningen till differentialekvationen ges av $K(1-e^{-t/T})\cdot 10$. Slutvärdet är således $10K$ (vilket naturligtvis även följer från slutvärdesteoremet) och det följer att $K = 20$. Vid tidpunkten $t = T$ är utsignalen $K(1-e^{-1})\cdot 10$, dvs T är tidpunkten där utsignalen når 63% av slutvärdet. Eftersom $0.63 \cdot 200 = 126$ så följer det att $T = 200$.

   (c) Om systemet är linjärt så skall en halvering av insignalen leda till en halvering av utsignalen. Detta är inte fallet i figuren, och systemet kan alltså inte vara linjärt.

   (d) Stegsvar (1) går mot 0, och det enda system som uppvisar en statisk förstärkning $|G(0)| = 0$ är Bode (1). Stegsvar (2) är tidsfunktionen $y(t) = t$, dvs lösningen till $\dot{y}(t) = 1$ vilket betyder att överföringsfunktionen är $1/s$. Bodediagrammet i (2) stämmer. Bodediagram (3) har statisk förstärkning 1 och Bodediagram (4) har en långt större statisk förstärkning. Således Stegsvar 3 - Bode (3) och Stegsvar 4 - Bode (4).

2. (a) Enkla iakttagelser: Stegsvar (1) uppvisar inga oscillationer. Stegsvar (2) är oscillativt, och har en statisk förstärkning $\neq 1$, stegsvar (3) är instabilt och stegsvar (4) är oscillativt med statisk förstärkning 1. Rotort 1 har alltid komplexa rötter, kan bli instabilt, och har en startpunkt i origo. Rotort 2 har alltid komlexa rötter och kan bli instabilt. Rotort 3 har alltid komplexa rötter och kan inte bli instabilt. Rotort 4 kan ha enbart reella rötter, kan ha komplexa rötter, och kan bli instabilt. Om $G(s) = N(s)/D(s)$ så blir slutna systemet $G_C(s) = \frac{KN(s)}{D(s)+KN(s)}$. För att detta system skall ha statisk förstärkning $G_c(0) = 1$ så måste $\frac{KN(0)}{D(0)+KN(0)} = 1$. Detta kan bara erhållas om $D(0) = 0$, dvs om $D(s)$ har ett nollställe i 0. Med andra ord, för att få statisk förstärkning 1 måste det finnas en startpunkt i origo (systemet måste ha integralverkan, pol i origo). Ur detta kopplar vi rotort (1) - stegsvar (4). Stegsvar (1) som ser ut att ha helt reella rötter kopplar vi till rotort (4). Av de återstående rotorterna är det bara (2) som uppvisar möjlig instabilitet, så rotort (2) - stegsvar (3) måste gälla. Kvar blir rotort (3) - stegsvar (2) (vilket är rimligt då rotorten säger att vi har stabila komplexa rötter och ingen pol i origo, och stegsvaret uppvisar oscillationer och statisk förstärkning $\neq 1$.)

   (b) $E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - G(s)(F(s)E(s) + V(s))$ vilket ger $E(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)}R(s) + \frac{-G(s)}{1+G(s)F(s)}V(s) = G_{re}R(s) + G_{ve}V(s)$. Insättning ger $E(s) = \frac{s^2+s}{s^2+2s+8}R(s) + \frac{-1}{s^2+2s+8}V(s)$



   (c) Översläng M i stegsvar är kopplad till resonstopp M_p enligt figur 5.11 i boken. Resonstoppen är $10^{4/20}$. I figuren ser vi att $M_p = 10^{0.2}$ motsvarar en dämpning på ungefär 0.33 och översläng $M = 0.35$.

   (d) Bandbredd är definierad som den frekvens ω_B sådan att $|G(i\omega_B)| = |G(0)|/\sqrt{2}$, vilket i dB betyder att förstärkningen fallit $3dB$. I figuren sker detta vid ungefär 4.25 rad/s

3. (a) En enkel förstärkning ändrar endast amplitudförstärkningen på kretsförstärkningen och lämnar fasen orörd. För att återkopplade systemet skall vara stabilt måste fasmarginalen vara större än noll. Det okompenserade systemet har en fasskärfrekvens (fas $-180°$) på 140 rad/s och förstärkningen är där $2.5 \cdot 10^{-4}$. Vi kan således öka förstärkningen med som mest 4000. Med $K = 4000$ blir skärfrekvensen 140 rad/s med fasmarginal 0°.

   (b) I den önskade skärfrekvensen $\omega_{cd} = 100$ rad/s är fasen just nu $-175°$ (ren P-reglering skulle alltså erhålla bara kunna erhålla en fasmarginal på 5° med detta skärfrekvenskrav). För att uppnå en fasmarginal på 50° måste vi fasavancera 45°. Krav på både e_0 och e_1 gör att vi misstänker att en lag-länk kommer att krävas för att öka lågfrekvensförstärkningen, och vi måste därför kompensera ytterliggare 6° för att kompensera för möjliga fasförluster i lag-länken. Ur fasavancering 51° får vi $\beta = 0.13$ och $\tau_D = \frac{1}{100 \cdot \sqrt{0.13}} = 0.028$. För att erhålla önskad skärfrekvens måste vi ha $|F_{lead}(i\omega_{cd})G(i\omega_{cd})| = 1$ vilket ger $K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_{cd}|)} = \frac{\sqrt{0.13}}{4.88 \cdot 10^{-4}} = 739$. Felkoefficienten e_0 blir 0 eftersom systemet i sig har en pol i origo ($\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+F_{lead(s)}F(s)} \frac{1}{s} = 0$). Felkoefficienten e_1 ges av $\lim_{t\to\infty} e(t)$ då $r(t)$ är en ramp ($R(s) = \frac{1}{s^2}$) vilket efter förenklingar leder till $e_1 = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sF_{lead(s)}G(s)} = \frac{1}{739 \cdot 5 \cdot 0.05} = 0.0054$. Reglerfelet är alltså en faktor 5.4 för stort. För att justera detta måste vi öka lågfrekvensförstärkningen i regulatorn med en faktor 5.4. Detta gör vi med en lag-länk. Lag-länken har statiska förstärkningen $1/\gamma$, så vi väljer $\gamma = 1/5.4 = 0.19$. Enligt tumregel väljs $\tau_I = 10/\omega_{cd} = 0.1$ (vilket gör att fasförlusten ej kan bli större än 6° i önskade skärfrekvensen)

(c) Fasförskjutningen i frekvensen ω pg.a. en tidsfördröjning T ges av ωT. I skärfrekvensen har vi en fasmarginal 50°, och den största tillåtna tidfördröjningen ges av $100 \cdot T = 50\pi/180$ vilket ger $T = 0.0087$. Beräkningarna får alltså ta som mest 8.7ms.

4. (a) För att kunna placera poler godtyckligt måste systemet vara styrbart.

$$\det \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -3\alpha+1 \\ 1 & -2\alpha \end{pmatrix} = -2\alpha^2 - (-3\alpha+1) = -2\alpha^2 + 3\alpha - 1 = (-2\alpha+1)(\alpha-1)$$

Determinanten är noll om $\alpha = 1$ eller $\alpha = 1/2$. Systemet är alltså styrbart för alla värden på α förutom 1 och 1/2.

(b) Överföringsfunktionen ges av

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{pmatrix} s & 1 \\ -2 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\alpha s + 1}{(s+1)(s+2)}.$$

Då $\alpha = 1$ förkortas överföringsfunktionen till $\frac{1}{s+2}$ och när $\alpha = \frac{1}{2}$ förkortas uttrycket till $\frac{1/2}{s+1}$. När $\alpha = 0$ har man två poler och inget nollställe. I övriga fall behålls ett nollställe och två poler.

(c) Slutna systemets överföringsfunktion ges av $G_c(s) = C(sI - (A - BL))^{-1} B l_0$

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \left(sI - \left(\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} \right) \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} l_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+3 & -1 \\ 2+l_1 & s+l_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} l_0 \\ &= \frac{1}{(s+3)(s+l_2) + (2+l_1)} l_0 \\ &= \frac{1}{s^2 + (3+l_2)s + 3l_2 + l_1 + 2} l_0 \end{aligned}$$

Vi önskar ha ett slutet system med polpolynom $(s+5)^2 = s^2 + 10s + 25$ vilket ger $l_2 = 7$ och $l_1 = 2$. För att erhålla $G_c(0) = 1$ krävs $l_0 = 3l_2 + l_1 + 2 = 25$.

5. (a) Vi kan skriva $G^0(s) = \frac{\bar{K}}{(s+1)^2} = \frac{10}{(s+1)^2} \frac{\bar{K}}{10} = \frac{10}{(s+1)^2}(1 + \frac{\bar{K}}{10} - 1) = G(s)(1 + (\frac{\bar{K}}{10} - 1))$. Dvs det relativa modellfelet är $\Delta(s) = \frac{\bar{K}}{10} - 1$.

(b) Enligt robusthetskriteriet krävs att $|\delta(i\omega)| < 1/|T(i\omega)|$ i alla frekvenser. Eftersom vänsterledet är frekvensobereonde så blir den kritiska punkten när högerledet är som minst. Detta sker när $|T(i\omega)|$ är som störst. Ur figuren får vi att det största värdet inträffar vid ungefär 3 rad/s och förstärkningen är där 1.87. Vi får kravet $\frac{\bar{K}}{10} - 1 < 1/1.87$ vilket ger $K < 15.3$.

(c) Öppna systemet påvisar en oändlig amplitudmarginal (fasen skär aldrig $-180°$), och förstärkningen kan alltså ökas godtyckligt mycket. Detta står ej i strid med resultatet i (b) eftersom robusthetskriteriet bara är ett tillräckligt krav för stabilitet, men inte nödvändigt.

(d) Resultatet påverkas ej. Med en regulator med olika fram- och återkopplingar så är det bara återkopplingsdelen som påverkar komplementära känslighetsfunktionen, vilken är den som används i robusthetskriteriet. Eftersom vi ej ändrat denna del, så blir resultatet det samma.