Lösningar till tentamen i TSRT19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2015-01-07

Svante Gunnarsson

1. (a) Genom att jämföra nämnaren i respektive överföringsfunktion med uttrycket

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

ser man att den relativa dämpningen är $\zeta = 0.5$ för båda systemen och att $\omega_0 = 2$ för $G_1(s)$ samt $\omega_0 = 4$ för $G_2(s)$. Vid samma relativa dämpning hos polerna avgörs stigtiden av polernas avstånd till origo, vilken medför att $G_2(s)$ har kortast stigtid.

(b) Då insignalen till ett linjärt system $G(s)$ utgörs av en sinus kommer även utsignalen i stationärt tillstånd att utgöras av en sinus, dock påverkad av systemet enligt,

$$y(t) = A|G(i\omega)|\sin(\omega t + \arg G(i\omega))$$

Enligt förutsättningarna har vi $\omega = 3, A = 4, |G(3i)| = 2/5, \arg G(3i) = -\arctan(3/4)$. Således blir utsignalen

$$y(t) = \frac{8}{5}\sin(3t - \arctan(3/4)).$$

(c) Observerbarhetsmatrisen ges av

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$$

vilket innebär att $\det \mathcal{O} = \alpha(1-\alpha)$. Styrbarhetsmatrisen ges av

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

vilket innebär att $\det \mathcal{S} = 1 - \alpha$. Sammantaget innebär detta att systemet är styr- och observerbart då $\alpha \neq 0, 1$.

(d) Enligt förutsättningarna har vi att

$$Y(s) = G(s)F(s)(R(s) - Y(s)) + V(s) = -G(s)F(s)Y(s) + V(s)$$

vilket innebär att

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{1 + F(s)G(s)}}_{S(s)} V(s),$$

vilket i ord innebär att känslighetsfunktionen talar om hur en additiv störning, $v(t)$ påverkar utsignalen $y(t)$. Återkopplingen gör nytta för de vinkelfrekvenser där känslighetsfunktionenens absolutbelopp är mindre än ett, vilket, enligt figuren, gäller för $\omega < 2$ rad/s. Återkopplingen är sämst där förstärkningen från störning till utsignal är störst, vilket sker vid $\omega = 3$ rad/s.

2. (a) Eftersom det antas att det återkopplade systemet är stabilt kan det stationära reglerfelet destämmas m.h.a. slutvärdesteoremet enligt

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s).$$

Vidare har vi att $E(s) = R(s) - Y(s), Y(s) = F(s)G(s)E(s)$, vilket innebär att

$$E(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)} R(s),$$

där

$$F(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right).$$

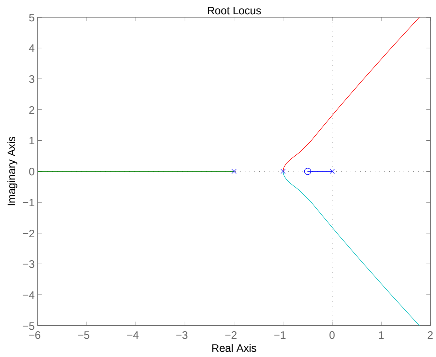
Sammantaget ger detta att det stationära felet ges av

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1 + K\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}} \frac{A}{s^2} = \cdots = \frac{2AT_I}{K}$$

(b) Det slutna systemets överföringsfunktion ges av

$$G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{K(1+2s)}{2s(s+1)^2(s+2) + K(2s+1)}$$

Den karakteristiska ekvationen ges alltså av $2s(s+1)^2(s+2) + K(2s+1) = 0$, vilket innebär att rotorten har startpunkter i $0, -1$(dubbel) , -2 och en slutpunkt i -0.5. Det finns alltså 3 asymptoter i riktingarna $\frac{\pi}{3}, \pi$ och $\frac{5\pi}{3}$, med skärningspunkt i -1.17. Detta leder till en rotort enligt figur 1.



Figur 1: Rotort till uppgift 2b.

För att avgöra för vilka K systemet är asymptotiskt stabilt undersöker vi skärningen med den imaginära axeln ($s = i\omega$)

$$\begin{aligned}
2i\omega(i\omega+1)^2(i\omega+2) + K(2i\omega+1) &= 0\\
2\omega^4 - 8\omega^3 - 10\omega^2 + 4\omega i + K + K2\omega i) &= 0\\
2\omega^4 - 10\omega^2 + K + \omega(-8\omega^2 + 4 + 2K)i &= 0
\end{aligned}$$

Detta svarar mot följande två ekvationer

$$\begin{aligned}
2\omega^4 - 10\omega^2 + K &= 0,\\
\omega(-8\omega^2 + 4 + 2K) &= 0,
\end{aligned}$$

Löser vi den undre av dessa får vi $\omega = 0, \omega^2 = \frac{2+K}{4}$, vilket insatt i den första ekvationen ger

$$K^2 - 8K - 36 = 0,$$

med lösningarna $K \approx 11.2, K \approx -3.2$. Stabilitetsområdet utgörs alltså av $K < 11.2$.

(c) Ett stort värde på K ger ett litet stationärt fel, men det ger också ett oscillativt (och för stora K instabilt) återkopplat system.

3. (a) För $F(s) = 1$ är skärfrekvensen ca 0.45 rad/s och fasmarginalen ca 60°. Kraven på halverad stigtid med bibehållen dämpning innebär att $F(s)$ ska bestämmas så att den nya skärfrekevensen blir $\omega_{c,d} = 0.9$ rad/s och att fasmarginalen vid $\omega_{c,d}$ blir 60°.

Vid $\omega = 0.9$ är $\arg G(i0.9) \approx -175°$. Med hänsyn till en eventuell lag-kompensering innebär detta att det behövs en fasökning på ca 60°, vilket enligt Figur 5.13 i boken innebär att $\beta = 0.05$. Detta medför därmed att $\tau_D \approx 5$. Vid $\omega = 0.9$ är $\mid G(i0.9) \mid \approx 0.6$ och för att den nya skärfrekvensen ska placeras rätt väljs förstärkningen K så att

$$\mid F_{lead}(i\omega_{c,d})G(i\omega_{c,d}) \mid = 1 \Rightarrow \mid \frac{K}{\sqrt{\beta}} G(i\omega_{c,d}) \mid = 1 \Rightarrow K = \sqrt{0.05}/0.6 = 0.37$$

Därefter kontrolleras e_1, d v s det stationära felet vid en enhetsramp, vilket ges av

$$e_1 = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG_0(s)} = \frac{1}{F_{lead}(0)\lim_{s\to 0} sG(s)} \approx \frac{1}{0.37 \cdot 1 \cdot 0.4} = 6.75$$

där $\lim_{s\to 0} sG(s) = k = 0.4$. Kravet $|e_1| < 0.01$ är ej uppfyllt, vilket gör att vi måste ha en laglänk,

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

Felet blir då

$$e_1 = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG_0(s)} = \frac{1}{F_{lead}(0)F_{lag}(0)\lim_{s\to 0} sG(s)} \approx \frac{1}{0.37 \cdot (1/\gamma) \cdot 0.4} = 6.75\gamma$$

Vi måste således ha $6.75\gamma < 0.01$. Eftersom det inte finns några begränsningar för valet av γ väljs $\gamma = 0$, och τ_I väljs enligt tumregel till $\tau_I = 10/0.9 = 11.1$. Detta ger totala överföringsfunktionen för återkopplingen:

Svar:

$$F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s) = 0.37\frac{5 \cdot s + 1}{5 \cdot 0.05 \cdot s + 1}\frac{11.1 \cdot s + 1}{11.1 \cdot s}$$

(b) Känslighetsfunktionen ges av

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} \quad \Rightarrow \quad |S(i\omega)| = \left|\frac{1}{1 + G_0(i\omega)}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1 + \Re(G_0(i\omega)))^2 + (\Im(G_0(i\omega)))^2}}$$

Kretsförstärkningen $G_0(i\omega)$ för $\omega = 0.1$ rad/s ges av

$$G_0(i0.1) = F(i0.1)G(i0.1) = 0.757e^{-i0.426} \cdot 4e^{-i1.66} = 3.03e^{-i2.08}$$

där uttrycket för $F(i0.1)$ fås genom insättning av $s = i0.1$ i regulatorn från a) och $G(i0.1) = 4e^{-i95\cdot\pi/180} = 4e^{-i1.66}$ fås ur figur.

Insättning i uttrycket för $|S(i\omega)|$ ovan ger slutligen

$$|S(i0.1)| = \frac{1}{\sqrt{(1 + 3.03\cos(-2.08))^2 + (3.03\sin(-2.08))^2}} \approx 0.37$$

Svar: $|S(i0.1)| = 0.37$

4. (a) Enligt blockschemat har vi att

$$
\begin{aligned}
P(s) &= \frac{1}{cs}\left(K_q U(s) - K_c P(s) - aY(s)\right),\\
Y(s) &= \frac{1}{ms}\left(aP(s) - bY(s)\right),
\end{aligned}
$$

vilket kan skrivas

$$
\begin{aligned}
sP(s) &= \frac{1}{c}\left(K_q U(s) - K_c P(s) - aY(s)\right),\\
sY(s) &= \frac{1}{m}\left(aP(s) - bY(s)\right).
\end{aligned}
$$

Vi kan nu inverstransformera detta

$$
\begin{aligned}
\dot{p}(t) &= \frac{K_q}{c}u(t) - \frac{K_c}{c}p(t) - \frac{a}{c}y(t),\\
\dot{y}(t) &= \frac{a}{m}p(t) - \frac{b}{m}y(t),
\end{aligned}
$$

vilket kan skrivas

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\frac{b}{m}x_1(t) + \frac{a}{m}x_2(t),\\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{a}{c}x_1(t) - \frac{K_c}{c}x_2(t) + \frac{K_q}{c}u(t).
\end{aligned}
$$

(b) Om samtliga konstanter sätts till ett får följande modell

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u,\\
y &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} x.
\end{aligned}
$$

Det slutna systemet ges av

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= (A - BL)x + Br,\\
y &= Cx.
\end{aligned}
$$

Det slutna systemets poler ges av egenvärdena till

$$
A - BL = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 - l_1 & -1 - l_2 \end{pmatrix},
$$

d.v.s. av

$$
\det(\lambda I - (A - BL)) = \lambda^2 + (2 + l_2)\lambda + 2 + l_1 + l_2.
$$

Enligt förutsättningarna ska systemets poler ligga i $-2+2i$ och $-2-2i$, vilket leder till följande karakteristiska ekvation

$$
(\lambda + 2 + 2i)(\lambda + 2 - 2i) = \lambda^2 + 4\lambda + 8.
$$

Identifikation leder nu till att $l_1 = 4, l_2 = 2$, d.v.s. återkopplingen ges av

$$
u(t) = -4x_1(t) - 2x_2(t) + r(t) = -\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}}_{L} x(t) + r(t)
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= (A - BL)x + Br,\\
y &= Cx.
\end{aligned}
$$

Laplacetransformera nu detta,

$$\begin{aligned} sX(s) &= (A - BL)X(s) + BR(s), \\ Y(s) &= CX(s). \end{aligned}$$

Detta kan nu skrivas

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - (A - BL))^{-1}BR(s), \\ Y(s) &= CX(s). \end{aligned}$$

Sätter vi nu in den övre ekvationen i den undre får vi

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - (A - BL))^{-1}B}_{G(s)}R(s)$$

Detta innebär att

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 8}.$$

5. (a) Antagandet att det verkliga systemet ges av

$$G^0(s) = G(s)(1 + \alpha)$$

innebär att det relativa modellfelet är

$$\Delta G(s) = \alpha$$

Eftersom $\mid \alpha \mid < 0.5$ ger robusthetskravet att $F(s)$ måste konstrueras så

$$\mid G_c(i\omega) \mid < 2$$

(b) Amplitudmarginalen definieras vid den vinkelfrekvens ω_p då

$$\arg G_0(i\omega_p) = \arg F(i\omega_p)G(i\omega_p) = -180°$$

d v s $G_0(i\omega_p)$ är ett reellt negativt tal. Det kan därmed skrivas $G_0(i\omega_p) = -\beta$ där $\beta > 0$. Robusthetskravet ger nu

$$\mid G_c(i\omega_p) \mid = \frac{\mid G_0(i\omega_p) \mid}{\mid 1 + G_0(i\omega_p) \mid} = \frac{\beta}{1-\beta} < 2$$

Detta ger kravet $\beta = \mid G_0(i\omega_p) \mid < 2/3$, vilket ger $A_m > 1.5$.

(c) Fasmarginalen definieras vid den vinkelfrekvens ω_c då

$$\mid G_0(i\omega_c) = \mid F(i\omega_c)G(i\omega_c) \mid = 1$$

d v s $G_0(i\omega_c)$ är ett komplext tal med absolutbelopp ett, och kan därmed skrivas $G_0(i\omega_c) = e^{i\phi}$. Robusthetskravet ger nu

$$\mid G_c(i\omega_c) \mid = \frac{\mid G_0(i\omega_c) \mid}{\mid 1 + G_0(i\omega_c) \mid} = \frac{1}{\mid 1 + e^{i\phi} \mid} < 2$$

Genom att utnyttja sambandet $e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi$ fås kravet

$$\frac{1}{\mid 1 + \cos\phi + i\sin\phi \mid} = \frac{1}{\sqrt{2 + 2\cos\phi}} < 2$$

d v s

$$1/2 < \sqrt{2 + \cos\phi}$$

vilket ger

$$\cos\phi > -7/8$$

d v s

$$\phi > \arccos(7/8) - \pi$$

Fasmarginalen ges av $\phi_m = \phi - (-\pi)$ vilket ger $\phi_m > \arccos(7/8)$.