Lösningar till tentamen i TSRT19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2014-10-24

Svante Gunnarsson

1. (a)
   - Exempel på styrsignal: Rodervinklar, dragkraft från motorer
   - Exempel på utsignal: Hastighet, höjd, kurs
   - Exempel på störsignal: Vind (turbulens)

   (b) Systemets överföringsfunktion ges av $G(s) = \frac{k}{s\tau+1}$. Den stationära förstärkningen ges därför av $G(0) = \frac{k}{0\tau+1} = k$. Detta innebär att utsignalen kommer gå mot k*0.5 (0.5 är stegets höjd) då $t \to \infty$. I grafen kan man läsa av att slutvärdet för utsignalen är 1.5 vilket ger att

   $$1.5 = k * 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1.5}{0.5} = 3$$

   Tidskonstanten τ kan läsas av som det tiden det tar för utsignalen att nå 63% av sitt slutvärde. 63% av 1.5 är 0.945 och i grafen kan man läsa av att $y(t) = 0.945$ efter ca 2 sekunder. Alltså

   $$\tau = 2$$

   (c) Stegsvar A och B går stationärt mot 4 och 3, de övriga mot 1, genom att läsa av den stationära förstärkningen i bodediagramen ($G(0i)$) fås A-III och D-II. Vidare är resonanstoppen kraftigare i I än i IV vilket återspeglas som ett mera oscillativt stegsvar: C-I och B-IV.

   Svar: A-III, C-I, B-IV. D-II

2. (a) För $h_0 = \frac{q_0^2}{2a^2 g}$ och insignal $q(t) = q_0$ instoppat i diffekvationen fås

$$\dot{h}(t) = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h_0} + \frac{1}{A}q_0 = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\frac{q_0^2}{2a^2g} + \frac{1}{A}q_0 = 0,$$

vilket visar att den valda punkten är en stationär punkt. Den fysikaliska tolkningen är att det rinner ut lika mycket vatten som det tillförs. Vidare ser man att gör man hålet mindre kommer den stationära nivån att bli högre, och på samma sätt att ökas inflödet till tanken stiger den stationära nivån i tanken.

(b) Det lineariserade överföringsfunktionen ges av $G(s) = \frac{1}{s+\alpha}$ där $\alpha = a\sqrt{\frac{g}{2h_0}}$. För $a = 0.01$ och $g \approx 10$ fås $\alpha = 0.01\sqrt{\frac{10}{2h_0}}$.

För den höga nivån har vi $h_0 = 5$ vilket ger

$$\alpha_{hög} = 0.01\sqrt{\frac{10}{2\cdot 5}} = 0.01 \quad (1)$$

$$G_{hög}(s) = \frac{1}{s+0.01} \quad (2)$$

För den låga nivån har vi $h_0 = 5/9$ vilket ger

$$\alpha_{låg} = 0.01\sqrt{\frac{10\cdot 9}{2\cdot 5}} = 0.03 \quad (3)$$

$$G_{låg}(s) = \frac{1}{s+0.03} \quad (4)$$

(c) För lineariseringen, dvs $Y(s) = \frac{1}{s+\alpha}U(s)$ fås med den givna återkopplingen överföringsfunktionen:

$$G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)} = \frac{sK_P + K_I}{s(s+\alpha) + K_P s + K_I} = \frac{sK_P + K_I}{s^2 + (\alpha + K_P)s + K_I},$$

(med $\alpha_{låg} = 0.03$ för den låga nivån och $\alpha_{hög} = 0.01$ för den höga nivån). Den karaktäristiska ekvationen ges då av

$$0 = s^2 + (\alpha + K_P)s + K_I$$

(d) För den låga nivån hade vi $\alpha_{låg} = 0.03$ vilket. Den karakterisktiska ekvationen blir då

$$0 = s^2 + (0.03 + K_P)s + K_I$$

Önskade poler i -0.04 ger att den karaktäristiska ekvationen måste kunna skrivas som

$$0 = (s+0.04)^2 = s^2 + 0.08s + 0.0016$$

Härifrån identifieras att $K_I = 0.0016$ och $K_P = 0.08 - 0.03 = 0.05$ då polplaceringen sker vid låg nivå.

(e) Används återkopplingen vid den höga nivån med $\alpha_{hög} = 0.01$ ändras den karaktäristiska ekvationen till

$$0 = s^2 + (0.01 + K_P)s + K_I$$

Med samma K_P och K_I som i d) fås

$$0 = s^2 + (0.01 + 0.05)s + 0.0016 = s^2 + 0.06s + 0.0016 = s^2 + 2\cdot\frac{3}{4}\cdot 0.04s + 0.0016$$

vilket ger polerna $s \approx -0.03 \pm 0.0265i$. Den andra omskrivningen av karaktäristiska ekvationen ger dessutom den relativa dämpningen $\zeta = \frac{3}{4}$. Avläsning i figur 5.16 i kursboken ger att överslängen är $\sim 5\%$ i ett stegsvar.

3. (a) Med insignal $u(t) = A\sin(\omega t)$ ges utsignalen generellt av sambandet

$$y(t) = \mid G(i\omega) \mid A\sin(\omega t + \arg G(i\omega))$$

Här är frekvensen $\omega = 1$ och amplituden $A = 1$. Ur bodediagrammet fås $\mid G(i1) \mid \approx 2.2$ och $\arg G(i1) \approx -\frac{115}{180}\pi \approx -2.0$ (rad) vilket ger utsignalen

Svar:

$$y(t) = 2.2\sin(t - 2.0)$$

(b) Beräknar en lead-lag regulator som uppfyller kraven. Vid den önskade skärfrekvensen 2 är fasmarginalen enligt bodediagrammet $\approx 36°$. En önskad fasmarginal på $60°$ medför att kompenseringen måste fasavancera $60° - 36° + 6° = 30°$ med hänsyn tagen till en tillkommande lag-länk. Denna fasavancering fås med $\beta = 0.33$. Vidare fås $\tau_D = \frac{1}{2\sqrt{0.33}} \approx 0.87$. Bodediagrammet ger även $\mid G(i2) \mid = 0.75$. För att få önskad skärfrekvens väljs K så att

$$\mid F_{lead}(i2) \mid\mid G(i2) \mid = \frac{K}{\sqrt{\beta}} \cdot 0.75 = 1$$

vilket ger $K \approx 0.77$.

Eftersom störningen $v(t) = 0$ fås från blockschemat i uppgiften + återkoppling följande uttryck för reglerfelet

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_D(s)G_V(s)F(s)}R(s)$$

(där $G_D(s) = \frac{k_D}{(s\tau_D+1)}$ och $G_V(s) = \frac{k_V}{(s\tau_V+1)}$

Slutvärdesteoremet ger då (med $R(s) = 1/s$)

$$e_0 = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1 + G_D(s)G_V(s)F(s)}\frac{1}{s} = \frac{1}{1 + G_D(0)G_V(0)F(0)}$$

$\mid e_0 \mid \leq 0.01$ ger då med $F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s)$

$$\mid e_0 \mid = \left| \frac{1}{1 + G_D(0)G_V(0)F_{lead}(0)F_{lag}(0)} \right| = \frac{1}{1 + k_D k_V K/\gamma} \leq 0.01$$

vilket ger kravet

$$\gamma \leq \frac{k_D k_V K}{99} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 0.77}{99} \approx 0.0778$$

Koefficienten τ_I väljs enligt tumregel $\tau_I = 10/w_{c,d} = 5$. Detta ger den resulterande regulatorn:

Svar:

$$F(s) = 0.77 \cdot \frac{0.87s + 1}{0.33 \cdot 0.87s + 1} \cdot \frac{5s + 1}{5s + 0.0778}$$

(c) Eftersom referenssignalen $r(t) = 0$ fås från blockschemat i uppgiften + återkoppling följande uttryck för reglerfelet

$$E(s) = -\frac{G_D(s)}{1 + G_D(s)G_V(s)F(s)}V(s)$$

Slutvärdesteoremet ger då (med $V(s) = 1/s$)

$$e = \lim_{s\to 0} sE(s) = -\lim_{s\to 0} s\frac{G_D(s)}{1 + G_D(s)G_V(s)F(s)}\frac{1}{s} = -\frac{G_D(0)}{1 + G_D(0)G_V(0)F(0)}$$

Med regulatorn $F(s)$ fråm b) fås då

$$e = -\frac{k_D}{1 + k_D k_V K/\gamma} = -\frac{2}{1 + 2 \cdot 5 \cdot 0.77/0.0778} = -0.02$$

(d) Enligt ekvation (6.6) i boken är $G^0(s) = G(s)\big(1 + \Delta_G(s)\big)$ vilket ger att $\Delta_G = \frac{G^0(s)}{G(s)} - 1 = \frac{-s\delta}{s(1+\delta)+1}$.

4. (a) Vi har systemet $\ddot{y}(t) = -y(t) - b\dot{y}(t) + u(t)$. Med $x_1(t) = y(t)$ och $x_2(t) = \dot{y}(t)$ så blir $\dot{x_1}(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$ och $\dot{x_2}(t) = \ddot{y}(t) = -x_1(t) - bx_2(t) + u(t)$. Skrivet på matrisform blir det

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

(b) Polerna till systemet ges av $\det(sI - A) = 0$. Den karaktäristiska ekvationen blir $s^2 + bs + 1 = 0$. Systemet har alltså reella poler om $b \geq 2$.

(c) Det återkopplade systemets poler ges av $\det(sI - (A - BL)) = 0$. Den karaktäristiska ekvationen blir, med $b = 0.5$, $s^2 + s(l_2 + 0.5) + l_1 + 1 = 0$. Om man vill placera polerna i -2 motsvarar det följande karaktäristiska ekvation $s^2 + 4s + 4 = 0$. Jämförelse ger $l_1 = 3$ och $l_2 = 3.5$. Det återkopplade systemet ges av

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} l_0 r(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

(d) I stationärt tillstånd så är $\dot{x}_1(t) = 0$ och $\dot{x}_2(t) = 0$ vilket ger att $x_2(t) = 0$ och att $x_1(t) = \frac{l_0}{4} r(t)$. Kraften (insignalen) ges av $u(t) = -Lx(t) + l_0 r(t) = -l_1 x_1(t) - l_2 x_2(t) + l_0 r(t) = -3x_1(t) - 3.5x_2(t) + l_0 r(t)$. I stationärt tillstånd då $r(t)$ är ett steg med amplitud ett fås därmed $u(t) = -3 \cdot l_0/4 + l_0 \cdot 1 = l_0/4$.

5. (a) Det återkopplade systemets överföringsfunktion ges av

$$G_C(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

där $G(s)$ och $F(s)$ enligt uppgiften medför att

$$G_C(s) = \frac{K}{s + K}$$

För G_C ges bandbredden av $\omega_B = K$ eftersom $G_0(0) = 1$ och

$$\mid G_C(i\omega_B) \mid = \frac{K}{\sqrt{K^2 + K^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Svar: $\omega_B = K$

(b) Överföringsfunktionen från referenssignal till styrsignal ges av vilket med de givna överföringsfunktionerna ger

$$G_u(s) = \frac{K(s+1)}{K + s}$$

vilket medför att förstärkningen av en sinusformad referenssignal bestäms av

$$\mid G_u(i\omega) \mid = \frac{K\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{K^2 + \omega^2}}$$

Kravet att

$$\mid G_u(i\omega) \mid < 1$$

leder till kravet $K < 1$.

(c)

$$G_{ud}(s) = \frac{sF(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{sK(s+1)}{K + s} = \frac{s(s+1)}{1 + \frac{s}{K}}$$

vilket ger

$$\mid G_{ud}(i\omega) \mid = \frac{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{1 + (\omega/K)^2}}$$

Förstärkningskurvan $\mid G_{ud}(i\omega) \mid$ som funktion av ω kommer att växa som ω för små ω. Beroende på om K är större eller mindre än ett kommer kurvan att därefter se något olika ut, men den kommer att växa monotont som funktion av ω. Detta innebär att den inom det aktuella intervallet, d v s $0 \leq \omega \leq 10$ kommer att vara störst vid $\omega = 10$. Detta ger kravet

$$\frac{10\sqrt{10^2 + 1}}{\sqrt{1 + (10/K)^2}} < 1$$

vilket ger

$$K^2 < \frac{100}{100 \cdot 101 - 1}$$

villket ger

$$K < 0.1$$

Vi utgår även från att vi alltid väljer ett icke-negativt K varför kravet blir

$$0 \leq K < 0.1$$