Lösningar till tentamen i TSRT03, TSRT12, TSRT19
Reglerteknik

Tentamensdatum: 2014-08-22

Svante Gunnarsson

1. (a) Med insignalen $u(t) = \sin t$ blir utsignalen

$$y(t) = \mid G(i) \mid \sin(t + \arg G(i))$$

efter att den transienta delen (homogena lösningen) av utsignalen dött ut. Utgående från detta kan följande observationer göras:

- A: Signalen har vinkelfrekvensen 2 rad/s, vilket är dubbelt så stort som insignalens vinkelfrekvens, och den kan därmed inte vara utsignal från systemet.
- B: Systemets förstärkning vid $\omega = 1$ ges av ges av

$$\mid G(i) \mid = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}}$$

och dess fasvridning ges av

$$\arg G(i) = -arctan(1/a)$$

Signalen i figur B fås för $b = 1$ och $a = 2$. Signalens fasvridning kan verifieras på motsvarande sätt.

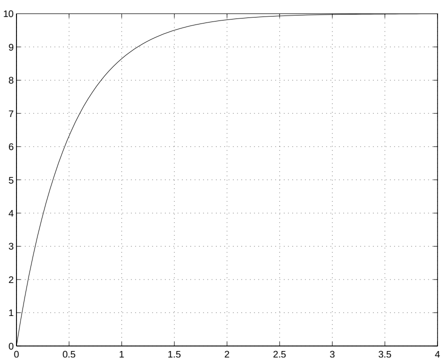
- C: Eftersom $b < a$ enligt uppgiften kan utsignalen inte ha amplitud större än ett. Signalen kan alltså inte vara utsignal från systemet.
- D: Signalen innehåller en konstant utöver sinussignalen, vilket dock inte kan uppstå när insignalen enbart är en sinussignal. D kan alltså inte vara utsignal från systemet.

Svar: Endast signal B kan vara utsignal från systemet för den givna insignalen.

(b) För den givna insignalen och med antagandet $y(0) = 0$ fås utsignalen via lösning av differentialekvationen till

$$y(t) = 10 \cdot (1 - e^{-2t})$$

vilket ger stegsvaret Alternativt kan man utgå från systemets överföringsfunktion



Figur 1: Stegsvar.

$$G(s) = \frac{4}{s+2} = \frac{2}{s/2+1}$$

och konstatera att systemet har tidskonstanten 0.5 samt statisk förstärkning 2. När insignalen har amplitud fem innebär det att utsignalen går mot $2 \cdot 5 = 10$ och att stetgsvaret nått 63% av slutvärdet efter 0.5 sek.

(c) Överföringsfunktionen för ett system givet på tillståndsform ges av

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

vilket med de aktuella matriserna ger

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2}$$

d v s polerna är -2 och -1 samt nollstället är -3. Polerna kan även bestämmas direkt genom att läsa av diagonalelementen i matrisen A eftersom denna är triangulär.

2. (a) Ett större värde på K gör att det stationära reglerfelet blir mindre, vilket innebär att kurvorna B och C hör samman med parametervärdena (i) och (ii), samt att kurvorna A och D hör samman med parametervärdena (iii) och (iv).

Ett mindre värde på β ger en större fasökning, d v s ökad D-återkoppling, vilket gör stegsvaret bättre dämpat än för ett större värde på β.

Detta ger kombinationerna: A $\leftrightarrow$ (iii), B $\leftrightarrow$ (ii), C $\leftrightarrow$ (i) och D $\leftrightarrow$ (iv).

(b) Enligt figuren är $\mid S(i\omega) \mid < 1$ d v s mindre än 0 dB för $\omega < 3$ rad/s. Frekvensintervallet där $\mid S(i\omega) \mid < 1$ kan inte göras godtyckligt stort p g a de grundläggande begränsingarna för ett reglersystem, d v s

- Begränsad styrsignal
- Mätstörningar
- Modellfel

(c) Systemet är styrbart eftersom dess styrbarhetsmatris

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

uppfyller att $\det S \neq 0$. Därmed kan det återkopplade systemets poler placeras godtyckligt och därmed kan ett stabilt återkopplat system erhållas.

3. (a) Med proportionell återkoppling, d v s $F(s) = K$ påverkas endast amplitudkurvan för $G_O(i\omega) = KG(i\omega)$, d v s faskurvan påverkas inte. För att nå fasmarginal 60° ska K alltså väljas så att $\mid G_O(i\omega) \mid = 1$ vid den vinkelfrekvens där $\arg G_0(i\omega) = -120°$. Detta inträffas vid ca 0.27 rad/s, och där är $\mid G(i\omega) \mid \approx 3.5$. Det innebär att K ska väljas som $K = 1/3.5 \approx 0.29$.

(b) Överföringsfunktionen från referenssignal till reglerfel ges i detta fall av

$$E(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)} R(s)$$

Eftersom det återkopplade systemet är stabilt kan slutvärdessatsen tillämpas, vilket med $F(s)$ och $G(s)$ enligt ovan och den aktuella referenssignalen, vilken innebär att $R(s) = 0.5/s^2$, ger

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1 + KG(s)} \frac{0.5}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{0.5}{s + sKG(s)} = \frac{0.5}{K} = 1.75$$

(c) Den givna regulatorn är en lag-återkoppling och en förstärkning, vilken kommer att försämra fasmarginalen med som mest 5.7°. För att bibehålla fasmarginalen måste skärfrekvensen därför flyttas till $\omega_c = 0.24\,\text{rad/s}$, och där är systemets förstärkning 4. Enligt tumregeln väljs $\tau_I = 10/\omega_c \approx 42$. Därefter bestäms K så rätt skärfrekvens fås, d v s $1 = |F(\omega_c i)G(\omega_c i)| \approx 4K$, alltså $K = 1/4$. Med lag-återkoplingen blir det stationära reglerfelet

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{0.5\gamma}{K} = 2\gamma$$

Kravet

$$2\gamma \leq 0.175$$

ger därmed $0 < \gamma \leq 0.0875$.

Detta ger sammantaget regulatorn

$$F(s) = 0.25 \cdot \frac{42s + 1}{42s + 0.0875}$$

(d) Fasförsämringen beroende på en fördröjning T är $T\omega$. Avståndet fram och tillbaka till månen blir med givna approximationer $2 \cdot 384 \cdot 10^6/(300 \cdot 10^6)\,\text{s} = 2.56\,\text{s}$ och fasförsämringen vid w_c alltså $2.56 \cdot 0.24\,\text{rad} < 0.62\,\text{rad} < 36°$. Slutsatsen är att systemet är stabilt även efter försämringen av fasen då fasmarginalen förblir positiv.

4. (a) Poler: $-\frac{1}{\tau_T}$ och $-\frac{1}{\tau_V}$

   (b) Med ekvationerna för tanken och ventilen,

$$Y(s) = \frac{k_T}{s\tau_T + 1} Q(s) \tag{1}$$

$$Q(s) = \frac{k_V}{s\tau_V + 1} U(s), \tag{2}$$

fås i tidsdomänen

$$\dot{y}(t) = -\frac{y(t)}{\tau_T} + \frac{k_T q(t)}{\tau_T} \tag{3}$$

$$\dot{q}(t) = -\frac{q(t)}{\tau_V} + \frac{k_V u(t)}{\tau_v} \tag{4}$$

och med tillståndsvariablerna $x_1 = y(t)$ och $x_2(t) = q(t)$ blir (3) och (4)

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\tau_T & k_T/\tau_T \\ 0 & -1/\tau_V \end{pmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ k_V/\tau_V \end{pmatrix}}_{B} u(t) \tag{5}$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} x(t) \tag{6}$$

Alternativt kan man starta med tillståndsformen och gå över till överföringsfunktioner. Då skall man även motivera $f(0) = 0$ som uppkommer vid transformerna av derivatorna.

   (c) Med angivna värden på konstanterna insatta i A och B fås det återkopplade systemet

$$\dot{x}(t) = (A - BL)x(t) + Br(t) \tag{7}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{8}$$

där $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}$.
Karatäristiska ekvationen ges av

$$det(\lambda I - (A - BL)) = det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ 5l_1 & \lambda + 5 + 5l_2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + (6 + 5l_2)\lambda + 5 + 5l_2 + 10l_1 = 0. \tag{9}$$

Poler i $-4 \pm 4i$ innebär att

$$(\lambda + 4 + 4i)(\lambda + 4 - 4i) = \lambda^2 + 8\lambda + 32 \tag{10}$$

som ger ekvationssytemet

$$6 + 5l_2 = 8 \tag{11}$$

$$5 + 5l_2 + 10l_1 = 32 \tag{12}$$

med lösningen $l_1 = 5/2$ och $l_2 = 2/5$

   (d) Ingen återkoppling från flöde innebär att $L = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 \end{pmatrix}$ och karakteristiska ekvationen blir

$$\lambda^2 + 6\lambda + 30 = 0$$

En jämförelse med

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

ger $\omega_0 = \sqrt{30}$ och $2\zeta\omega_0 = 6$ vilket ger $\zeta = 0.55$.
Om den andra sensorn går sönder blir återkopplingen $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ och lösningen till karakteristiska ekvationen blir (ursprungliga systemets poler)

$$\lambda = -3 \pm 2 \tag{13}$$

vilket innebär att systemet är stabilt.

5. Återkopplingen ger överföringsfunktionen: $G_c(s) = K/\big(K + (s+\alpha)^n\big)$. Här kommer man ganska långt med lite rotortstänkande. Det givna systemet har n startpunkter men inga slutpunkter, alltså fås n asymptoter. För $n = 1$ går asymptoten utefter den reella axeln mot $-\infty$ med start i $-\alpha$. För $n = 2$ fås asymptoter vinkelrätt mot reella axeln utgående från $-\alpha$. För $n > 2$ fås minst en asymptot som går ut i höger halvplan.

   (a) Då $\alpha > 0$ följer enl. ovan:
      - För $n = 1$: alla poler ligger i VHP för alla $K > 0$. **Uppfyllt för alla $K > 0$.**
      - För $n = 2$: alla poler ligger för små K nära startpunkten, alltså i VHP, och när $K \to \infty$ vandrar de mot asymptoterna. Kontroll krävs för att se om de bryter de imaginära axeln, låt $s = i\omega$ och testa: $0 = (s+\alpha)^2 = -\omega^2 + 2\alpha\omega i + \alpha^2 + K$. Skärningar saknas. **Uppfyllt för alla $K > 0$.**
      - För $n > 2$: alla poler ligger för små K nära startpunkten, alltså i VHP, och när K ökar vandrar minst en pol över i HHP för att möta sin asymptot. **Uppfyllt för vissa $K > 0$.**

   (b) Då $\alpha < 0$ följer enl. ovan:
      - För $n = 1$: polen börjar i HHP för att sen vandra över i VHP. **Uppfyllt för vissa $K > 0$.**
      - För $n = 2$: alla poler börjar i HHP för små K, och när $K \to \infty$ vandrar de mot asymptoterna. Kontroll krävs för att se om de bryter de imaginära axeln, låt $s = i\omega$ och testa: $0 = (s+\alpha)^2 + K = -\omega^2 + 2\alpha\omega i + \alpha^2 + K$. Skärningar saknas. **Inte uppfyllt för några $K > 0$.**
      - För $n = 3$: alla poler börjar vid startpunkten i HHP, för att sen vandra mot asymptoterna (en stannar i HHP). Vandrar polerna över i VHP samtidigt? Låt $s = i\omega$, då fås $0 = (s+a)^3 + K = -\omega^3 i + 3\alpha\omega^2 + 3\alpha^2\omega i + \alpha^3 + K$ som med lite mindre räkningar visar att endast en skärning av imaginära axeln sker. **Inte uppfyllt för några $K > 0$.**