TENTAMEN I TSRT12 REGLERTEKNIK

SAL: TER3, TERE

TID: 2019-06-13 kl. 14:00-19:00

KURS: TSRT12 Reglerteknik

PROVKOD: TEN1

INSTITUTION: ISY

ANTAL UPPGIFTER: 5

ANSVARIG LÄRARE: Anders Hansson, tel. 013-281681, 070-3004401

BESÖKER SALEN: cirka kl. 15:30 och 17:00

KURSADMINISTRATÖR: Ninna Stensgård, 013-282225, ninna.stensgard@liu.se

TILLÅTNA HJÄLPMEDEL:

1. *T. Glad & L. Ljung*: "Reglerteknik. Grundläggande teori"
2. Tabeller och formelsamlingar, t.ex.:
   L. Råde & B. Westergren: "Mathematics handbook",
   C. Nordling & J. Österman: "Physics handbook",
   S. Söderkvist: "Formler & tabeller"
3. Miniräknare utan färdiga program

Normala inläsningsanteckningar får finnas i böckerna.

LÖSNINGSFÖRSLAG: Finns på kursens websida efter skrivningens slut.

VISNING av tentan äger rum 2015-06-19, kl. 12.30–13.00 i Ljungeln, B-huset, ingång 27, A-korridoren till höger.

PRELIMINÄRA BETYGSGRÄNSER:		
	betyg 3	23 poäng
	betyg 4	33 poäng
	betyg 5	43 poäng

OBS! Lösningar till samtliga uppgifter ska presenteras så att alla steg (utom triviala beräkningar) kan följas. Bristande motiveringar ger poängavdrag.

Lycka till!

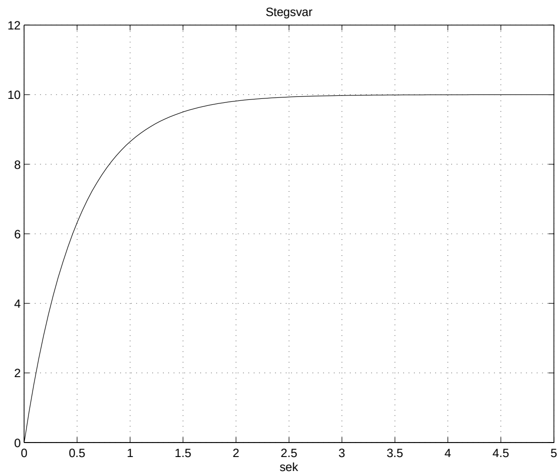
1. (a) Ett system antas kunna beskrivas av modellen

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

där

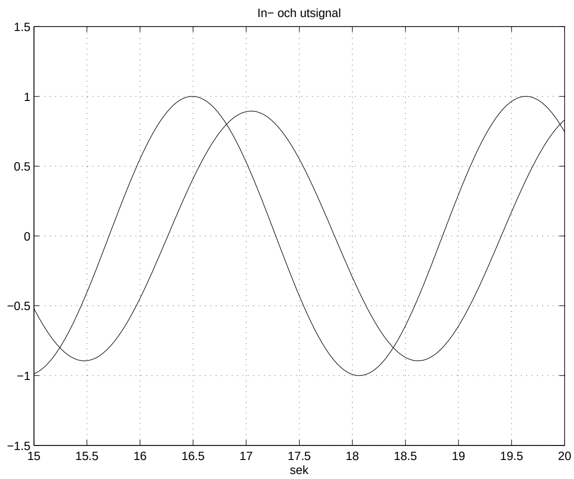
$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

För att bestämma koefficienterna τ och k gör man ett experiment där insignalen till systemet är ett steg med amplituden fem. Den resulterande utsignalen ges av figuren nedan. Ange k och τ. (2p)



Figur 1: Stegsvar till uppgift 1.a

(b) Betrakta åter problemet i uppgift a). Efter en månad misstänker man att systemets egenskaper har ändrats, och man gör därför ett nytt experiment. Denna gång låter man dock insignalen vara sinusformad, $u(t) = \sin \omega t$. In- och utsignal visas i figuren nedan. Har systemets egenskaper ändrats, d v s har någon av koefficienterna fått andra värden? (3p)



Figur 2: In- och utsignal till uppgift 1.b

(c) Ett system ges av tillståndsmodellen

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \qquad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} x(t)$$

Ange systemets poler och nollställen. (3p)

(d) Stigtiden för ett system definieras (som bekant) som den tid det tar för stegsvaret att gå från 10% till 90% av sitt slutvärde. Betrakta nu ett system ges av differentialekvationen

$$\dot{y}(t) = y(t) + 4u(t)$$

Vilken stigtid har systemet? (2p)

2. (a) Systemet

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

där

$$G(s) = \frac{10}{(5 \cdot s + 1)^2}$$

styrs med återkopplingen

$$U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$$

där

$$F(s) = (K_p + K_I \frac{1}{s} + K_D s)$$

- Ange det återkopplade systemets karakteristiska ekvation.
- Bestäm koefficienterna K_P, K_I och K_D så att det återkopplade systemets poler placeras i -1?

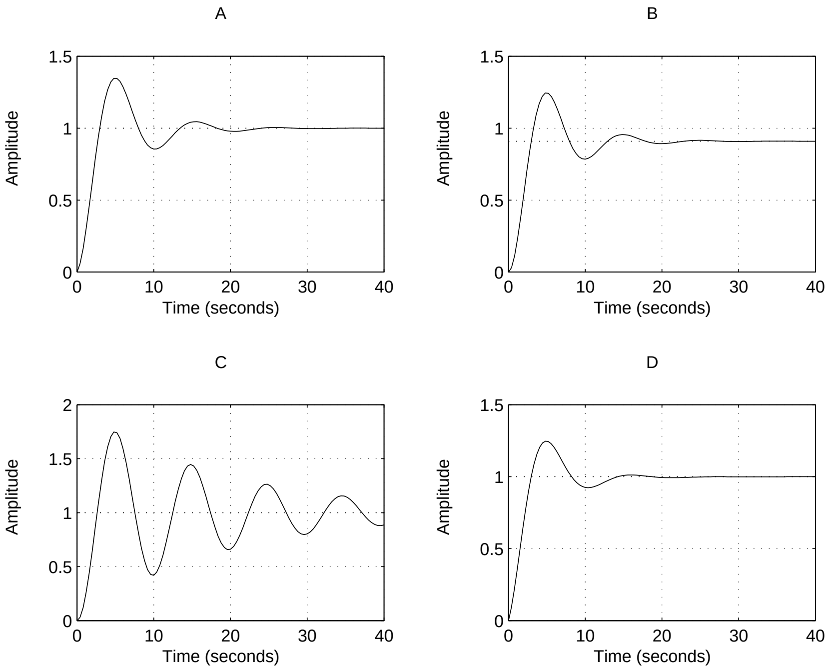
(6p)

(b) Betrakta åter systemet och återkopplingen i uppgift 2 a. Figuren nedan visar det återkopplade systemets stegsvar för några olika kombinationer av värden på K_P, K_I och K_D. Para ihop parametervärdena och figurerna.

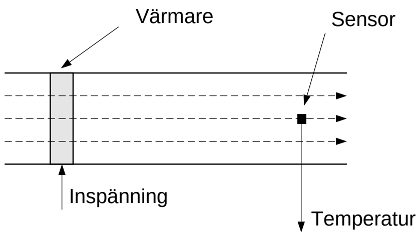
(i) $K_P = 1, K_I = 0, K_D = 0$ (ii) $K_P = 1, K_I = 0.1, K_D = 0$

(iii) $K_P = 1, K_I = 0.3, K_D = 0$ (iv) $K_P = 1, K_I = 0.1, K_D = 0.2$

(4p)


A
B
C
D
Amplitude
Time (seconds)
0
10
20
30
40
0
0.5
1
1.5
2

3. En process för uppvärmning av luft ges översiktligt i figuren nedan.



Figur 3: Värmeprocess.

Processen antas kunna beskrivas av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{2}{0.25s + 1} e^{-0.2s}$$

där tidsfördröjningen orsakas av att luften strömmar en sträcka genom ett rör innan temperaturen mäts. Systemets bodediagram ges på sista sidan i tentan.

(a) Markera i bodediagrammet hur amplitud- och faskurva skulle sett ut om systemet ej innehållit någon tidsfördröjning. Ta loss diagrammet och bifoga det till lösningarna. (2p)

(b) Antag att temperaturen skall styras med proportionell återkoppling

$$U(s) = K(R(s) - Y(s))$$

sådan att fasmarginalen är minst 55°. Vilken skärfrekvens kan uppnås? Hur stort blir det stationära felet om r är ett enhetssteg? (4p)

(c) Antag att systemet nu skall styras med en återkoppling på formen

$$U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$$

där

$$F(s) = K\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

Bestäm återkopplingen så att följande krav uppfylls:

- $e_0 = 0$
- $\phi_m \geq 55°$
- ω_c så stor som möjligt.

(4p)

4. (a) Ett system

$$Y(s) = G(s)U(s) + V(s)$$

med utsignal y, insígnal u och störsignal v styrs med en regulator

$$U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$$

I figur 4 finns bodediagrammen för överföringsfunktionerna $F(s)G(s)$, $\frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$ och $\frac{1}{1+F(s)G(s)}$.
Antag att $v(t) = \sin(2t)$ och att $r(t) = 0$. Kommer störsignalen v att förstärkas? Motivera ditt svar. (2p)

(b) Betrakta återigen det återkopplade system som ges av bidediagrammen i figur 4. Modellen $G(s)$ av det system som skall styras är något osäker, och det kan därför antas att överföringsfunktionen för det verkliga systemet ges av

$$G^0(s) = (1 + G(s)(1 + \Delta_G(s)$$

där $\Delta_G(s) = \frac{10}{s+10}$. Använd robusthetskriteriet för att undersöka om det sanna återkopplade systemet är stabilt då regulatorn $F(s)$ används för att styra det sanna sysemet $G^0(s)$.

(3p)

(c) Betrakta följande system på tillståndsform

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

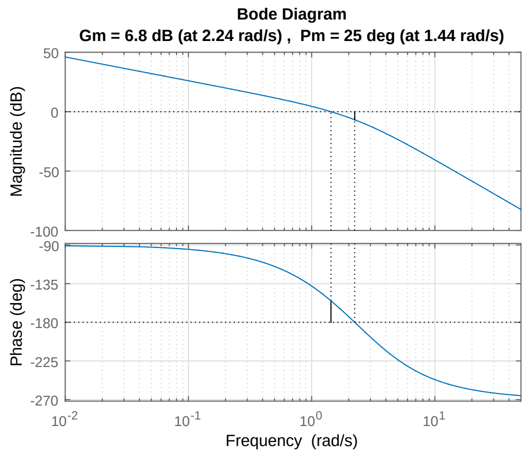
$$y(t) = (1 \quad 0)x(t)$$

- Ta fram en tillståndsåterkoppling

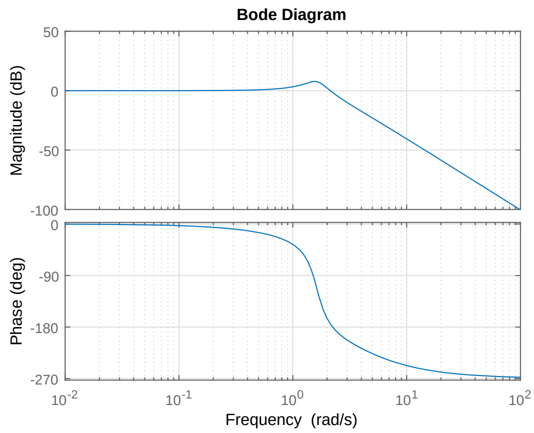
$$u(t) = -l_1x_1(t) - l_2x_2(t) + l_0r(t)$$

  så att det återkopplade systemets poler blir -4 och -1.
- Betrakta åter systemet i uppgift b). Går det att finna en tillståndsåterkoppling så att det återkopplade systemets poler kan placeras godtyckligt?

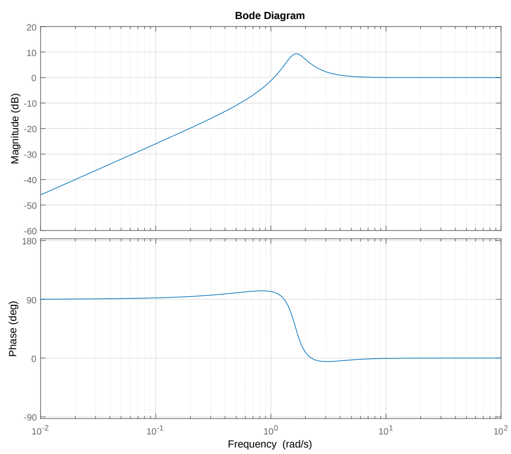
(5p)



(a) Bodediagram för $F(s)G(s)$

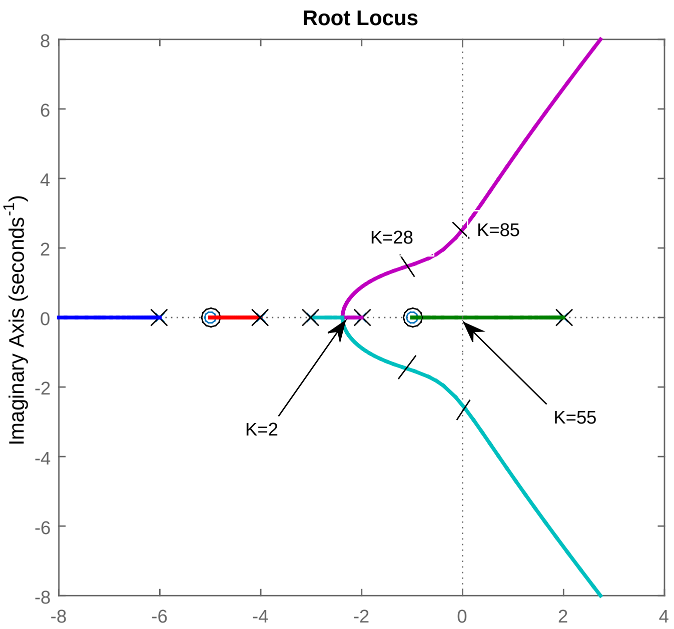


(b) Bodediagram för $\frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$



(c) Bodediagram för $\frac{1}{1+F(s)G(s)}$

Figur 4: Bodediagram till uppgift 4.



Figur 5: Rotort med avseende på K för det återkopplade systemet i uppgift 5.

5. Systemet $G(s)$ med insignalen u och utsignalen y skall följa referenssignalen r och styrs med regulatorn

$$U(s) = K(R(s) - Y(s))$$

Rotorten med avseende på K för det återkopplade systemet visas i figur 5.

Besvara nedanstående frågor och motivera svaren.

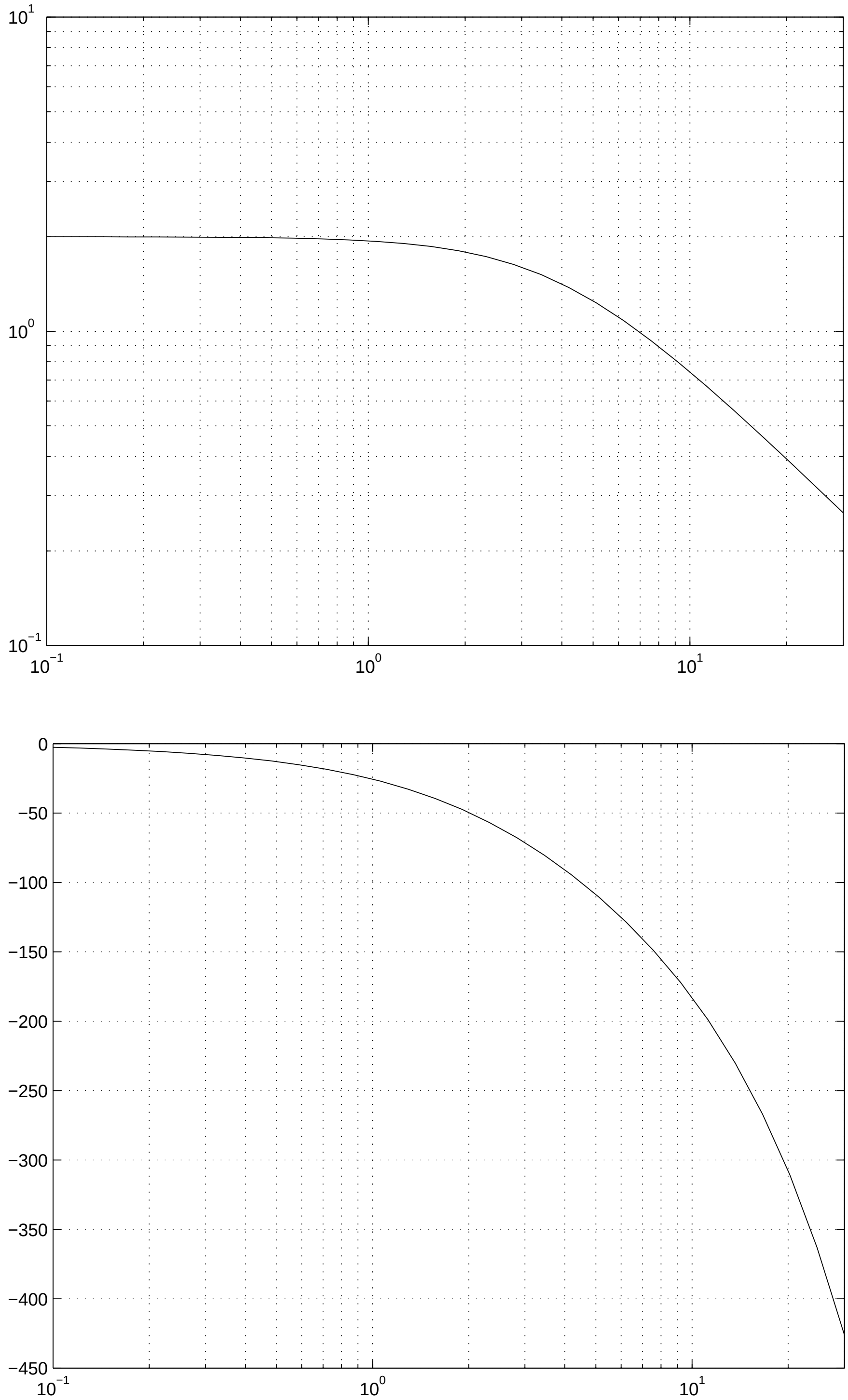
(a) För vilka K-värden är systemet stabilt? (2p)

(b) För vilka K-värden är samtliga poler reella? (2p)

(c) För vilka K-värden kan man uppnå ett stabilt och väl dämpat system? (Låt väl dämpat betyda att varje pol har en realdel som är till beloppet större än imaginärdelen.) (2p)

(d) Vilka gradtal har G i täljare och nämnare? (2p)

(e) Vad blir det stationära felet om referenssignalen är en ramp? (2p)



Figur 6: Bodediagram till uppgift 3

Lösningar till tentamen i Reglerteknik

Tentamensdatum: 13 Juni 2016

1. (a) I figuren observerar vi att systemet är stabilt, att $y(t)$ svänger in mot slutvärdet 10 samt att $y(t)$ har nått 63 % av slutvärdet vid tidpunkten $t = 0.5s$. Se tabell A.3 i läroboken (s. 234) för Laplace-transformen. $u(t)$ är ett enhetssteg med amplituden fem, så

$$U(s) = \frac{5}{s}, \text{ och} \tag{1}$$

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1}\frac{5}{s}. \tag{2}$$

Tidsfunktionen för utsignalen ges genom inverstransformering, $y(t) = 5k(1 - e^{-t/\tau})$. Genom slutvärdet kan k bestämmas till $k = 2$, och tidskonstanten τ är lika med t vid den tidpunkt då 63 % av slutvärdet har nåtts ($1 - e^{-1} = 0.63$), alltså $\tau = 0.5$.

(b) Ur figuren kan vi läsa ut periodtiden $T \approx 3.1$, dvs. $\omega = 2$. Då insignalen är en stationär sinus, $u(t) = \sin(\omega t)$, ges utsignalen av ett stabilt LTI system av $y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \phi)$, $\phi = \arg G(i\omega)$, då transienta förlopp avklingat.

Vi kan också notera att utsignalens amplitud $A \approx 0.9$, samt att utsignalen når sitt maximum $\delta t \approx 0.6s$ efter insignalen. Med dessa observationer kan koefficienterna k och τ på nytt bestämmas, och jämföras med resultaten från uppgift 1a.

Fasförskjutningen ges av

$$\phi = \frac{-\delta t}{T} 2\pi = -1.2.$$

Vidare gäller att

$$|G(2i)| = \left|\frac{k}{2i\tau + 1}\right| = A, \tag{3}$$

$$\arg G(2i) = -\arctan(2\tau) = \phi. \tag{4}$$

Detta ger att $\tau = 1.29$ samt $k = 2.48$. Dessa resultat stämmer inte alls med resultaten från uppgift 1a, så parametrarna har ändrats.

(c) Överföringsfunktionen för ett system på tillståndsform ges av

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

Vi har

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},$$

så

$$G(s) = \frac{3(s + 5/3)}{(s+1)(s+2)}.$$

Systemets poler är i $s = -1$, $s = -2$, och ett nollställe i $s = -5/3$.

(d) Laplacetransformering av differentialekvationen ger att motsvarande överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{4}{s-1}.$$

Systemet har alltså en pol i $s = 1$ och är instabilt. Vi kan då inte tala om någon stigtid eftersom det inte finns något begränsat slutvärde. Utsignalen kommer att växa obegränsat.

2. (a) Vi har

$$\begin{aligned} &Y = GU, \\ &U = F(R - Y), \\ \iff &Y = G_c R,\ G_c = \frac{FG}{1+FG}. \end{aligned}$$

Med G och F som definierade i uppgiften fås

$$\begin{aligned} G_c &= \frac{\frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \frac{10}{(5s+1)^2}}{1 + \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \frac{10}{(5s+1)^2}} \\ &= \frac{10(K_D s^2 + K_P s + K_I)}{s(5s+1)^2 + 10(K_D s^2 + K_P s + K_I)}. \end{aligned}$$

Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation är nämnaren i G_c, med ordningen 3.

K_D, K_P och K_I ska nu väljas så att systemets poler (tre stycken) placeras i $s = -1$. Alltså,

$$\begin{aligned} &s(5s+1)^2 + 10(K_D s^2 + K_P s + K_I) = k(s+1)^3, \\ \iff &25s^3 + (10 + 10K_D)s^2 + (1 + 10K_P)s + 10K_I = ks^3 + 3ks^2 + 3ks + k. \end{aligned}$$

Parametern k är en skalningsparameter för den eftersökta karakteristiska ekvationen. Parametrarna kan nu bestämmas genom att identifiera koefficienterna för varje gradtal på s:

$$\begin{aligned} &s^3 :\ 25 = k \\ &s^2 :\ 10 + 10K_D = 3k \\ &s :\ 1 + 10K_P = 3k \\ &\text{const.} :\ 10K_I = k \end{aligned}$$

Detta ger $K_D = 6.5$, $K_P = 7,4$ och $K_I = 2.5$ (samt $k = 25$).

(b)
- (i) - B: $G(s)$ har ingen integrator (pol i origo), så om inte regulatorn har någon integrerande verkan så kommer det slutna systemet att ha ett stationärt fel.
- (iv) - D, (ii) - A, (iii) - C: (iv) skiljer sig från (ii) genom den deriverande komponenten. Den kan alltså antas vara mindre oscillativ, men i övrigt ungefär lika snabb och utan stationärt fel. (ii) kan i sin tur väntas vara mindre oscillativ än (iii) som har en kraftigare integrerande verkan som lätt leder till överstyrning. I tur och ordning bör alltså (iv), (ii) och (iii) svara mot stegsvaren med ökande oscillationer, D, A och C.

3. (a) Amplitudkurvan ges av

$$| G(i\omega) | = | \frac{2}{0.25i\omega + 1} || e^{-0.2i\omega} | = | \frac{2}{0.25i\omega + 1} |$$

d v s amplitudkurvan förändras ej av tidsfördröjningen.

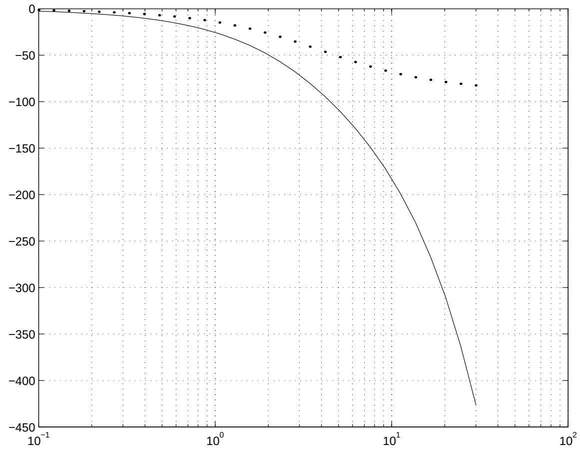
Utan tidsfördröjning är faskurvan

$$\arg G(i\omega) = \arg \frac{2}{0.25i\omega + 1} = -\arctan(0.25\omega)$$

Faskurvan visas i figuren nedan.

(b) Fasmarginal 55° innebär $\arg G(i\bar{\omega}_c) = -125°$ vid den önskade skärfrekvensen $\bar{\omega}_c$. Detta inträffar vid ca 6 rad/s. Vid denna frekvens är $| G(i\bar{\omega}_c) | \approx 1.1$, vilket innebär att K kan väljas som $K = 1/1.1 \approx 0.9$. Det stationära reglerfelet fås ur

$$e_0 = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + F(s)G(s)} = \frac{1}{1 + 0.9 \cdot 2} = 0.35$$



Figur 1: Faskurva. Heldragen: Med tidsfördröjning. Prickad: Utan tidsfördröjning.

(c)

$$e_0 = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+F(s)G(s)} = \frac{1}{1+K\frac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma}\cdot 2}$$
$$= \frac{\gamma}{\gamma+2K}.$$

För att uppnå $e_0 = 0$ måste vi välja $\gamma = 0$. Lag-länken sänker fasmarginalen ca $-6°$ vilket innebär att högsta möjliga skärfrekvens är vid den frekvens där $\arg G(i\omega) = -180° + 55° + 6° = -119°$. Detta inträffar för $\omega \approx 5.5 := \bar{\omega}_c$ rad/s. Välj därefter

$$\tau_I = 10/\bar{\omega}_c \approx 1.82$$

enligt tumregeln för att fasminskningen ska bli $< 6°$.

K bestäms så att denna önskade skärfrekvens uppnås

$$|F(i\bar{\omega}_c)G(i\bar{\omega}_c)| = 1,$$
$$\iff K\left|\frac{\tau_I i\bar{\omega}_c+1}{\tau_I i\bar{\omega}_c+\gamma}\right| |G(\bar{\omega}_c)| = 1$$

Med approximationen $|\frac{\tau_I i\bar{\omega}_c+1}{\tau_I i\bar{\omega}_c+\gamma}| \approx 1$ och avläsningen $|G(\bar{\omega}_c)| \approx 1.2$ får vi $K = 0.83$. Sammantaget ger det regulatorn

$$F(s) = 0.83 \cdot \frac{1.82s+1}{1.82s}.$$

4. (a) Känslighetsfunktionen, eller överföringsfunktionen från V till Y ges av

$$Y(s) = G(s)U(s) + V(s) = G(s)F(s)(R(s) - Y(s)) + V(s)$$
$$\iff Y(s)(1 + G(s)F(s)) = G(s)F(s)R(s) + V(s)$$
$$\iff Y(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} \cdot R(s) + \frac{1}{1+G(s)F(s)} \cdot V(s).$$

Känslighetsfunktionen ges alltså av $S(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)}$.

Då $r(t) = 0$ och $v(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = 2$ (stationär sinus) ges förstärkningen till utsignalen av $|S(i\omega)|$ enligt sinus in - sinus ut sambandet och givet att $S(s)$ är stabil. Ur diagramet kan vi läsa ut att $|S(2i)| \approx 6\text{dB} > 0\text{dB}$, alltså en förstärkning.

(b) Den komplementära känslighetsfunktionen ges av $T(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$ $(= G_c(s))$. Robusthetskriteriet säger att $G^0(s)$ återkopplat med $F(s)$ är stabilt om

$$|T(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} \; (= |i\omega/10 + 1| \text{ här}).$$

Detta kan undersökas grafiskt med hjälp av Bode-diagrammet för $T(i\omega)$. $|i\omega/10 + 1| \approx 1$ (= 0 dB) för frekvenser $\omega < 10$, och $|i\omega/10 + 1| \approx \omega/10$ för $\omega > 10$. Speciellt så kan man se att $|T(i\omega)|$ har en topp vid $\omega = 1.5$, $T(1.5i)$ är tydligt > 1. För denna frekvens uppfylls alltså inte robusthetskriteriet. Vi kan alltså inte garantera att det återkopplade systemet är stabilt med regulatorn $F(s)$.

(c) Med en tillståndsåterkoppling $L = (l_1 \;\; l_2)$ blir ges den karakteristiska ekvationen för det återkopplade systemet av

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\lambda I - (A - BL)) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} \lambda - 1 + l_1 & -3 + l_2 \\ 0 & \lambda + 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Det slutna systemet kommer därför att ha den karakteristiska ekvationen $(\lambda - 1 + l_1)(\lambda + 4) = 0$. Väljer vi $l_1 = 2$ hamnar det slutna systemets poler i -4 och -1, som efterfrågat. Däremot kan inte båda polerna placeras godtyckligt. Det framgår av den karakteristiska ekvationen att en pol nödvändigt hamnar i -4 oavsett val av återkoppling.

Detta resultat kan man också se genom att studera styrbarhetsmatrisen: Polerna kan placeras godtyckligt om systemet är styrbart. Systemet är styrbart om styrbarhetsmatrisen, S, har full rang (Resultat 8.5 i boken).

$$S = (B \;\; AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S har uppenbarligen ej full rang.

5. (a) Alla poler ligger i vänster halvplan då $55 < K < 85$, då är systemet stabilt.

(b) Samtliga poler är reella då $0 < K < 2$.

(c) Att alla poler har större belopp på realdelen än på imaginärdelen gäller för $K < 28$. Att alla poler ligger i vänster halvplan gäller för $55 < K < 85$. Bägge kraven uppfylls alltså inte för något K.

(d) Överföringsfunktionen $G(s)$ kan skrivas $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$. Då blir det slutna systemets överföringsfunktion

$$G_c(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{KB(s)}{A(s) + KB(s)},$$

med den karakteristiska ekvationen

$$\begin{aligned} A(s) + KB(s) &= 0, \\ \iff K &= -A(s)/B(s). \end{aligned}$$

Nollställena till $A(s)$ är rotortens startpunkter $(K = 0)$. Det finns 5 st startpunkter. Nollställena till $B(s)$ är rotortens ändpunkter $(K \to \infty)$, det finns två stycken ändpunkter. Alltså är gradtalet för $G(s)$ täljare 2 och nämnare 5.

(e) ∞ ty rampfelet ges av (sidan 62 i kursboken)

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \frac{1}{1 + KG(s)}$$

och $|KG(0)| < \infty$ (inga startpunkter i origo).