TENTAMEN I REGLERTEKNIK Y/D

SAL: KÅRA, G34, G35, G36

TID: 20 mars 2019, klockan 8 - 13

KURS: TSRT12, Reglerteknik Y/D

PROVKOD: TEN1

INSTITUTION: ISY

ANTAL UPPGIFTER: 5

ANTAL SIDOR PÅ TENTAMEN (INKLUSIVE FÖRSÄTTSBLAD): 7

ANSVARIG LÄRARE: Anders Hansson, tel 013-281681, 070-3004401

BESÖKER SALEN: 09:00, 11:00

KURSADMINISTRATÖR: Ninna Stensgård, tel 013-282225, ninna.stensgard@liu.se

TILLÅTNA HJÄLPMEDEL: Läroboken Glad-Ljung: ”Reglerteknik, grundläggande teori” med normala inläsningsanteckningar, tabeller, formelsamling, räknedosa utan färdiga program.

LÖSNINGSFÖRSLAG: Anslås efter tentamen på kursens hemsida.

VISNING av tentan äger rum 2017-04-12 kl 12.30-13.00 i Ljungeln, B-huset, ingång 27, A-korridoren till höger.

PRELIMINÄRA BETYGSGRÄNSER:	betyg 3	23 poäng
	betyg 4	33 poäng
	betyg 5	43 poäng

OBS! Lösningar till samtliga uppgifter ska presenteras så att alla steg (utom triviala beräkningar) kan följas. Bristande motiveringar ger poängavdrag.

Lycka till!

1. (a) För vilka värden på parametern β är systemet

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

styrbart? (2p)

(b) Man kan mäta y och $\dot{y}$ till systemet

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Hur kan man ur denna information räkna ut x? (2p)

(c) Det instabila skalära systemet

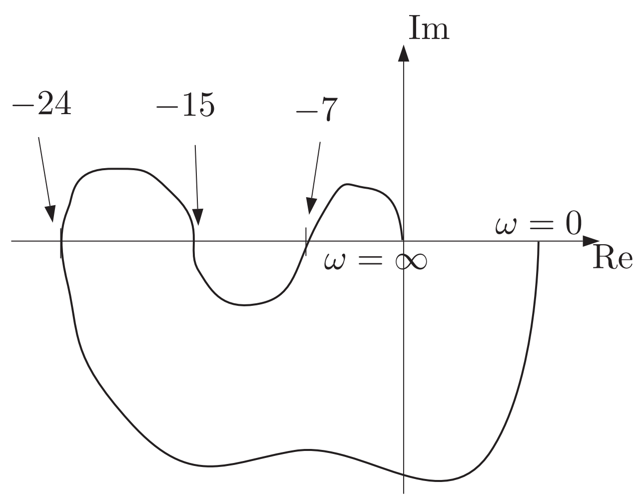
$$\dot{x} = x + u$$

skall stabiliseras genom återkoppling. Man vill göra detta med så liten styrsignalenergi som möjligt och väljer därför den styrlag som minimerar

$$\int_0^\infty (\epsilon x^2 + u^2)\, dt$$

för något litet positivt tal ϵ. Vilken blir den optimala styrlagen? Vilka poler får det återkopplade systemet i gränsfallet $\epsilon \to 0$? (2p)

(d) Ett linjärt system som saknar poler i höger halvplan har nedanstående nyquistkurva.



Antag att systemet regleras med en P-regulator. För vilka förstärkningar blir det återkopplade systemet stabilt? (2p)

(e) Betrakta systemet

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x$$

Vilken lösning får man om $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$? (2p)

2. För ett temperaturreglersystem gäller att

$$Y(s) = \frac{3}{s+1}U(s) + \frac{4}{(s+2)(s+5)}V(s)$$

där y är den reglerade temperaturen, u är tillförd effekt och v är omgivningstemperaturen. Anta att den önskade temperaturen är $y = 0$.

(a) Ange en framkopplingslänk

$$U(s) = F_f(s)V(s)$$

som helt eliminerar inverkan av störningen v på y. (2p)

(b) För att förenkla implementeringen av framkopplingen ersätter man F_f med den konstanta framkopplingen $\tilde{F}_f = F_f(0)$. Anta att v ges av $v(t) = -1 - 0.1t$ och att $U(s) = \tilde{F}_f V(s)$ används. Vad blir då $y(t)$ i stationaritet? (3p)

(c) Man kompletterar med en P-regulator så att

$$U(s) = \tilde{F}_f V(s) - KY(s)$$

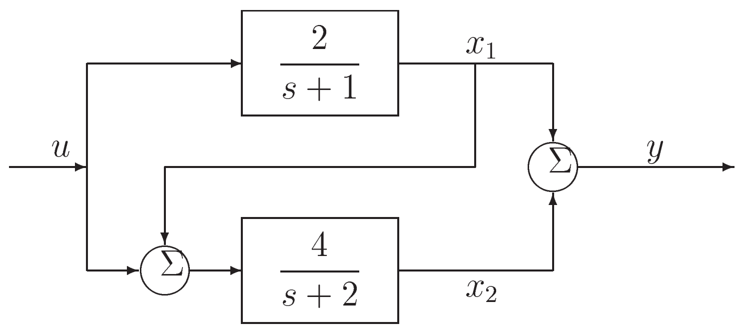
Vad blir nu $y(t)$ i stationaritet om $v(t) = -1 - 0.1t$? (3p)

(d) Antag att man bara använder P-reglering,

$$U(s) = -KY(s)$$

Vad blir nu $y(t)$ i stationaritet om $v(t) = -1 - 0.1t$? (2p)

3. (a) Ett system beskrivs av blockschemat nedan. Skriv systemet på tillståndsform med de tillståndsvariabler som anges i figuren. (3p)



(b) Ange överföringsfunktionen för systemet i uppgift a). (3p)

(c) Beräkna en observatör för systemet i uppgift a) sådan att observatörens poler placeras i -5. (4p)

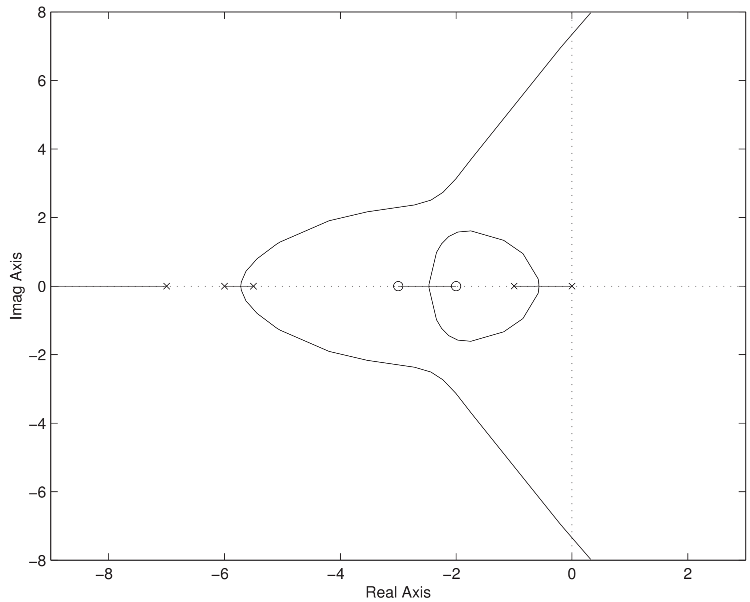
4. Man återkopplar systemet

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+5.5)(s+6)(s+7)}$$

med en PI-regulator

$$K(1+\frac{1}{sT_I})$$

Man väljer ett värde på T_I och ritar rotort med avseende på K, vilket ger resultatet nedan.



Man har också beräknat polplaceringen för följande K-värden.

```
K = 795   poler =  -14.5
                    -0.00 + 7.34i
                    -0.00 - 7.34i
                    -2.30
                    -2.65

K = 140   poler =  -10.70
                    -2.40 + 2.54i
                    -2.40 - 2.54i
                    -2.00 + 1.56i
                    -2.00 - 1.56i

K = 40.8  poler =   -9.12
                    -4.44 + 1.77i
                    -4.44 - 1.77i
                    -0.75 + 0.78i
                    -0.75 - 0.78i

K = 12.1  poler =   -8.154
                    -5.10 + 1.22i
                    -5.10 - 1.22i
                    -0.57
                    -0.57
```

(a) Vilken inställning har man på T_I? Motivera. (2p)

(b) För vilket K är man på stabilitetsgränsen? Motivera. (3p)

(c) Antag att man vill ha ett så snabbt system som möjligt men samtidigt undvika alltför svängiga tidssvar. Vilket ungefärligt K-värde bör man då ha? Motivera. (3p)

(d) Vilket stationärt fel får man vid ett steg i referenssignalen med K valt enligt föregående uppgift? Motivera (2p)

5. (a) Betrakta systemet

$$G(s) = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

Skriv det på tillståndsform

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

genom att använda styrbar kanonisk form. Visa sedan att

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = b_1 s^2 + b_2 s + b_3$$

(4p)

(b) Visa att det för ett godtyckligt system (med skalära u och y)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

gäller att

$$\frac{\det \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}}{\det (sI - A)} = G(s)$$

Tips: Visa först att man kan välja radvektorn v så att

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ 0 & G(s) \end{bmatrix}$$

(6p)

Lösningar till tentamen i Reglerteknik (TSRT12)

Tentamensdatum: 20 mars 2019

1. (a) Styrbarhetsmatrisen ges av $\begin{bmatrix} 1 & 1-\beta \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, som har determinant $-(2+\beta) \neq 0$ då $\beta \neq -2$. Systemet är alltså strybart om och endast om $\beta \neq -2$.

   (b) Vi mäter $y = x_1$ och $\dot{y} = \dot{x}_1$. Från första differentialekvationen har vi också att $x_2 = \dot{x}_1 + 2x_1 = \dot{y} + 2y$.

   (c) Den algebraiska Riccati-ekvationen ges av
   $$\epsilon + 2P - P^2 = 0$$
   som har lösning $P = 1 \pm \sqrt{1+\epsilon}$. Slutna systemet ges av $A - BL = 1 - P = -\sqrt{1+\epsilon}$ for $P = 1 + \sqrt{1+\epsilon}$. Den andra lösningen ger ett instabilt slutet system. Slutna systemetets egenvärde blir -1 då $\epsilon \to 0$.

   (d) Slutna systemet är stabilt om $24K < 1 \Leftrightarrow K < 1/24$ eller om $7K < 1$ och $15K > 1$, vilket är ekvivalent med att $1/15 < K < 1/7$.

   (e) Laplacetranformering av den första ekvationen ger $X_1 = 1/(s+2)$ som inverslaplacetransformeras på $x_1(t) = e^{-2t}$. Laplacetranformering av den andra ekvationen ger $X_2 = 2/(s+3)$ som inverslaplacetransformeras på $x_2(t) = 2e^{-3t}$.

2. (a) Med $Y = GU + HV$ där G och H defineras av uppgiften fås med $U = F_f V$ att $Y = (GF_f + H)V = 0$ om $F_f = -H/G = -\frac{4(s+1)}{3(s+2)(s+5)}$

   (b) Vi har $\tilde{F}_f = -\frac{2}{15}$. Vidare gäller att $G\tilde{F}_f + H = \frac{-2s(s-3)}{5(s+1)(s+2)(s+5)}$ och att $V = -1/s - 0.1/s^2$ och därför är enligt slutvärdessatsen, $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{-2s(s-3)}{5(s+1)(s+2)(s+5)}(-1/s - 0.1/s^2) = -0.3/25$. Förutsättningarna för slutvärdessatsen är uppfyllda eftersom vi endast har en pol i origo efter förkortnignar i $Y(s)$.

   (c) Det gäller att $Y = \frac{1}{1+GK}(G\tilde{F}_f + H)V$ där $\frac{1}{1+GK} = \frac{s+1}{s+1+3K}$. Denna extra faktor i Y påverkar resultatet i (b) så att vi ska multiplicera det med $\frac{1}{1+G(0)K} = \frac{1}{1+3K}$ och därför blir svaret $\frac{-0.3}{25(1+3K)}$. Observera att förutsättningarn för att använda slutvärdessatsen inte ändras ty $\frac{1}{1+GK}$ har alla poler strikt i vänster halvplan.

   (d) Om man bara använder P-reglering så blir slutna systemets överföringsfunktion $\frac{H}{1+GK} = \frac{4(s+1)}{(s+2)(s+5)(s+1+3K)}$ från V till Y. Eftersom denna överföringsfunktion ej har ett nolsställe i origo kommer gränsvärdet inte att vara ändligt.

3. (a) Ur figuren fås
   $$\begin{cases} X_1(s) = \frac{2}{s+1}U(s) \\ X_2(s) = \frac{4}{s+2}(X_1(s) + U(s)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX_1(s) = -X_1(s) + 2U(s) \\ sX_2(s) = 4X_1(s) - 2X_2(s) + 4U(s) \end{cases}$$
   Invers Laplacetransformering ger
   $$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - 2x_2(t) + 4u(t) \end{cases}$$
   Vi skriver detta i matrisform som
   $$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}}$$

   (b)
   $$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = C\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -4 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} B =$$
   $$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 4 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{6s+16}{s^2+3s+2}$$

(c)

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Observatörens poler ges av $\det(sI - A - KC) = s^2 + (k_1 + k_2 + 3)s + (6k_1 + k_2 + 2) = 0$.

Önskat polynom är $(s+5)^2 = s^2 + 10s + 25 = 0$.

Identifiera koefficienter $\Rightarrow k_1 = 16/5, k_2 = 19/5$.

Obsservatören blir $\boxed{\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C)\hat{x} \text{ med } K = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 16 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 \\ 3.8 \end{bmatrix}.}$

4. (a) $G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)} = \frac{K(s+1/T_I)(s+3)}{s(s+1)(s+5.5)(s+6)(s+7)+K(s+1/T_I)(s+3)}$ dvs ändpunkterna ligger i $s = -3$ och $s = -1/T_I$. Ur rotorten ser man då att $T_I = 0.5$

(b) Vid $K = 795$ ligger 2 poler på Im-axeln och för större K kommer dessa att flytta ut i HHP dvs stabilitetsgränsen är $K = 795$

(c) $K = 140$ ger poler så långt in i VHP som möjligt och Im-delen $\approx$ Re-delen av polerna gör att tidssvaren inte blir alltför svängiga.

(d) Inget stationärt fel vid stegsvar ty integration i regulatorn.

5. (a) Tillståndsformen ges av

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} x$$

Vi har att

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} s+a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ -1 & s & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & 0 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{vmatrix}$$
$$= -\left\{ -\begin{vmatrix} -1 & s \\ -b_2 & -b_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{vmatrix} \right\} = b_1 s^2 + b_2 s + b_3$$

(b) Det gäller att $v = C(sI - A)^{-1}$ satisfierar ekvationen i tipset. Från denna ekvation får man genom att ta determinanten av båda sidor av ekvationen att

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \det(sI - A)G(s)$$

eftersom determinanten av trangulära block-matriser är produkten av determinanterna av blocken och eftersom determinanten av triangulära matriser är pordukten av diagonalelementen.