TENTAMEN I TSRT12 REGLERTEKNIK

SAL: TER1, TERE

TID: 2018-08-24 kl. 8:00-13:00

KURS: TSRT12 Reglerteknik

PROVKOD: TEN1

INSTITUTION: ISY

ANTAL UPPGIFTER: 5

ANSVARIG LÄRARE: Anders Hansson, tel. 013-281681,070-3004401

BESÖKER SALEN: cirka kl. 9:00 och 11:00

KURSADMINISTRATÖR: Ninna Stensgård, 013-282225, ninna.stensgard@liu.se

TILLÅTNA HJÄLPMEDEL:

1. *T. Glad & L. Ljung*: ”Reglerteknik. Grundläggande teori” eller liknande bok i reglerteknik
2. Tabeller och formelsamlingar, t.ex.:
   L. Råde & B. Westergren: ”Mathematics handbook”,
   C. Nordling & J. Österman: ”Physics handbook”,
   S. Söderkvist: ”Formler & tabeller”
3. Miniräknare utan färdiga program

Inläsningsanteckningar får finnas i böckerna.

LÖSNINGSFÖRSLAG: Finns på kursens websida efter tentans slut.

VISNING av tentan äger rum 2018-09-13, kl. 12.30–13.00 i Ljungeln, B-huset, ingång 27, A-korridoren till höger.

PRELIMINÄRA BETYGSGRÄNSER:	betyg 3	23 poäng
	betyg 4	33 poäng
	betyg 5	43 poäng

OBS! Lösningar till samtliga uppgifter ska presenteras så att alla steg (utom triviala beräkningar) kan följas. All egen skriven kod som används ska skrivas ut och lämnas in med tentan. Bristande motiveringar ger poängavdrag.

Lycka till!

1. (a) I figuren nedan visas stegsvaret för systemet

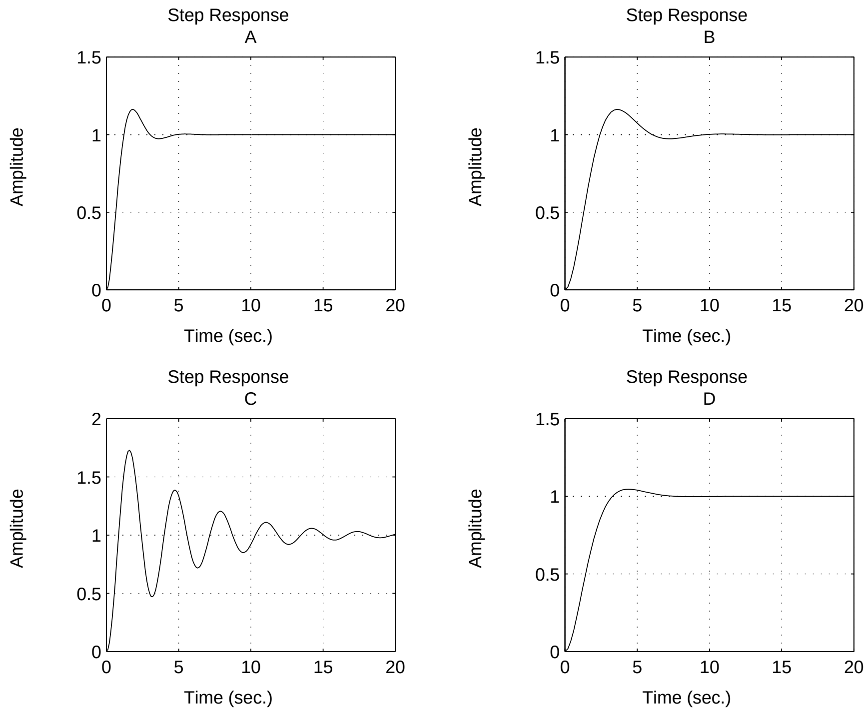
$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

för följande fyra kombinationer av ω_0 och ζ.

$$(i)\ \ \omega_0 = 1\ \ \zeta = 0.7 \quad (ii)\ \ \omega_0 = 2\ \ \zeta = 0.1$$

$$(iii)\ \ \omega_0 = 1\ \ \zeta = 0.5 \quad (iv)\ \ \omega_0 = 2\ \ \zeta = 0.5$$

Kombinera rätt bild med rätt parametervärden. (4p)



Figur 1: Stegsvar till uppgift 1 a.

(b) Temperaturen i ett rum kan approximativt beskrivas med ekvationen

$$\alpha \dot{y}(t) = u(t) - \beta(y(t) - v(t))$$

där $y(t)$ betecknar temperaturen i rummet, $v(t)$ betecknar utetemperaturen och $u(t)$ betecknar den tillförda värmeeffekten. Konstanten $\beta > 0$ representerar den s k värmegenomgångskoefficienten, vilken bl a beror av hur välisolerat rummet är. Konstanten $\alpha > 0$ beror av rummets förmåga att lagra upp värmeenergi. Antag att $y(0) = 0, v(t) = 0$ samt att $u(t)$ är ett enhetssteg. Skissa utseendet hos temperaturen $y(t)$. Ange särskilt temperaturens slutvärde. (3p)

(c) Antag att insignalen till systemet

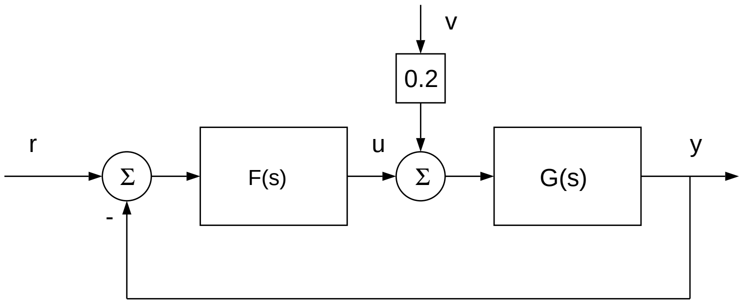
$$Y(s) = \frac{2}{s-4}U(s)$$

ges av $u(t) = 4 \sin 3t + 1$. Beskriv utsignalen. (3p)

2. Betrakta åter den modell för rumstemperaturen som studerades i uppgift 1.b och att överföringsfunktionen från u till y i det här fallet ges av

$$G(s) = \frac{1}{10s + 0.2}$$

Antag att temperaturen styrs med återkoppling enligt figuren nedan.



(a) Antag att temperaturen styrs med proportionell återkoppling

$$U(s) = K(R(s) - Y(s))$$

d v s $F(s) = K$. Bestäm överföringsfunktionen från v till reglerfelet e. (3p)

(b) Antag att utetemperaturen varierar sinusformat enligt $v(t) = \sin 0.1t$ och att $r(t) = 0$. Hur ska K väljas för att man ska uppnå att $\mid e(t) \mid \leq 0.1$ i stationärt tillstånd? (3p)

(c) Antag nu att temperaturen styrs med en PI-återkoppling på formen

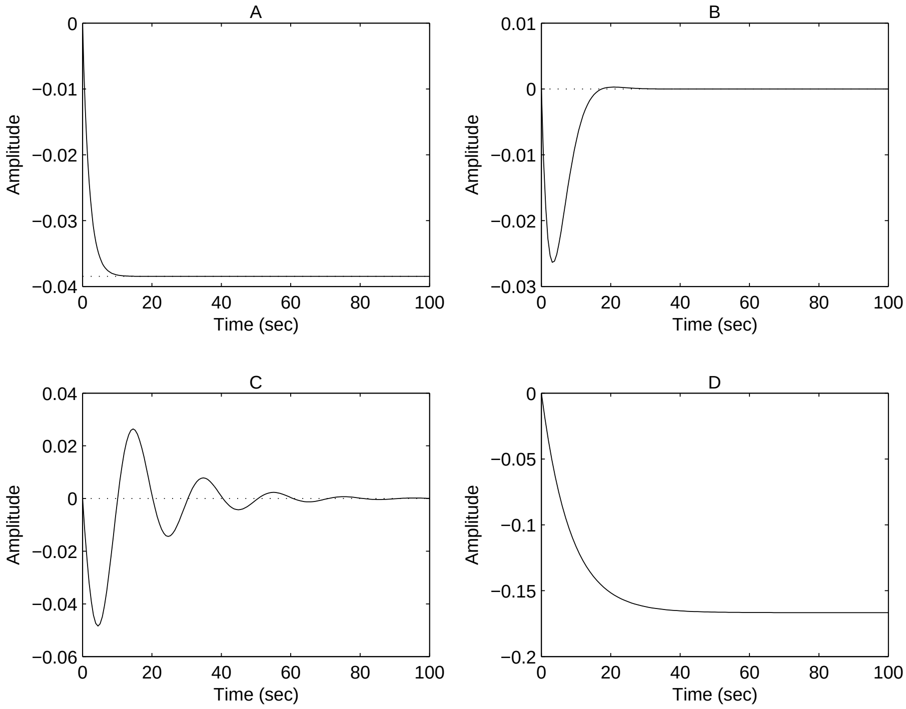
$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

I figurerna nedan visas utsignalen när $v(t)$ är ett enhetssteg, samtidigt som $r(t) = 0$ för fyra kombinationer av koefficienterna K_P och K_I.

$$(i)\ \ K_P = 5\ \ K_I = 1 \qquad (ii)\ \ K_P = 5\ \ K_I = 0$$

$$(iii)\ \ K_P = 1\ \ K_I = 1 \qquad (iv)\ \ K_P = 1\ \ K_I = 0$$

Bestäm det återkopplade systemets poler för de olika kombinationerna och kombinera koefficienterna med utsignalerna. (4p)



Figur 2: Figur till uppgift 2c.

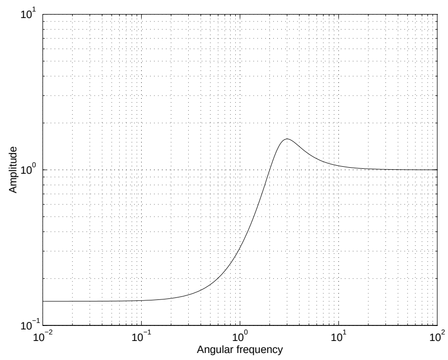
3. (a) Ett system beskrivs av sambandet

$$Y(s) = G(s)U(s) + V(s)$$

där $v(t)$ är en sinusformad störning $v(t) = A \sin \omega t$. Systemet styrs med återkoppling

$$U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$$

där $r(t) \equiv 0$. Absolutbeloppet för den resulterande känslighetsfunktionen ges i figuren nedan. För vilka vinkelfrekvenser hos $v(t)$ gör återkopplingen nytta? För vilken vinkelfrekvens är den sämst? (3p)



Figur 3: Amplitudkurva för känslighetsfunktionen i uppgift 3.a

(b) Betrakta följande system på tillståndsform

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \quad 0)x(t)$$

Går det att finna en tillståndsåterkoppling

$$u(t) = -l_1 x_1(t) - l_2 x_2(t) + r(t)$$

så att det återkopplade systemets poler kan placeras godtyckligt? (3p)

(c) Betrakta åter systemet i uppgiften ovan. Går det att finna en tillståndsåterkoppling

$$u(t) = -l_1 x_1(t) - l_2 x_2(t) + r(t)$$

så att det återkopplade systemet blir asymptotiskt stabilt? (4p)

4. I figurerna nedan visas amplitud- och faskurvan för ett system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{10}{s(s+8)(s+2)}$$

(a) Antag att systemet ovan styrs med proportionell återkoppling

$$U(s) = K(R(s) - Y(s))$$

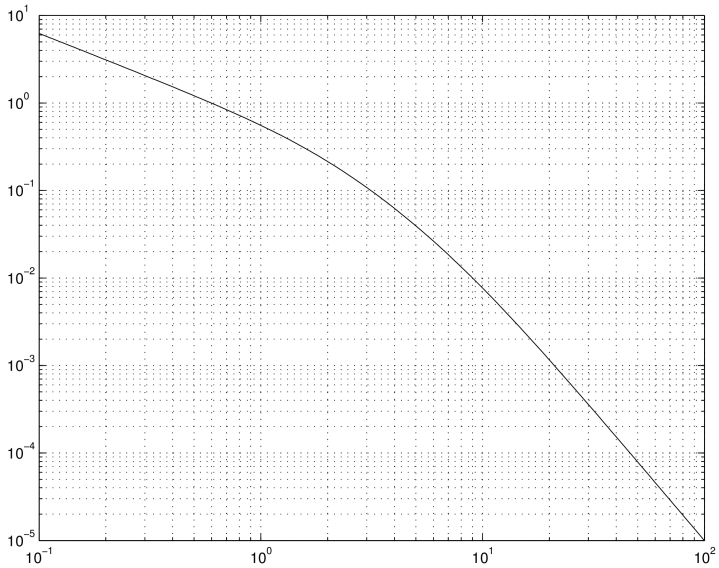
Hur stor kan förstärkningen K som högst väljas om man kräver att reglersystemet skall uppfylla kraven att $\phi_m \geq 30°$ samt $A_m > 2$. (2p)

(b) Hur stort blir det stationära reglerfelet då referenssignalen är ett enhetsteg respektive en enhetsramp då man använder den förstärkning som bestämdes i uppgift a)? (4p)

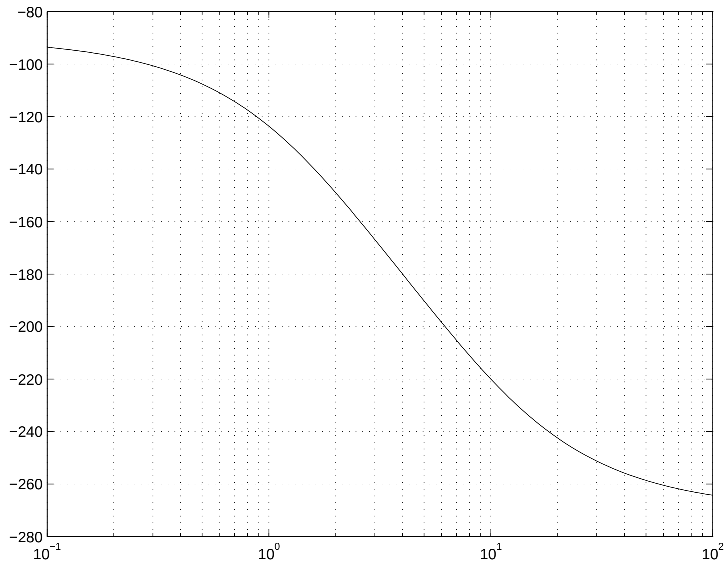
(c) Bestäm en återkoppling på formen

$$U(s) = K\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}(R(s) - Y(s))$$

sådan att de stationära reglerfelen reduceras till 1 % av vad som erhölls i uppgift b) samt att fasmarginalen uppfyller $\phi_m \geq 30°$. (4p)



10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}



−80
−100
−120
−140
−160
−180
−200
−220
−240
−260
−280
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}

5. En roterande maskin kan mycket förenklat beskrivas av modellen

$$J\ddot{y}(t) = u(t)$$

där $y(t)$ och $u(t)$ betecknar vinkelläge respektive applicerat moment, samt J betecknar den roterande massans tröghetsmoment.

(a) Antag att $J = 1$ och att man inför tillståndsvariablerna $x_1(t) = y(t)$ och $x_2(t) = \dot{y}(t)$. Verifiera att modellen kan skrivas på tillståndsform enligt nedan. (1p)

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \qquad y(t) = (1 \;\; 0)x(t)$$

(b) Antag man vill skatta systemets tillståndsvariabler med en observatör på formen

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t))$$

Bestäm K så att observatörens poler placeras i $-\alpha$. Gör en enkel skiss av elementen i K som funktion av α. (4p)

(c) Antag att mätsignalen innehåller en sinusformad mätstörning sådan att

$$y(t) = x_1(t) + n(t)$$

där $n(t)$ har vinkelfrekvensen 2 rad/s. Bestäm överföringsfunktionen från $n(t)$ till skattningen $\hat{x}_2(t)$ av rotationshastigheten hos maskinen, d v s $\dot{y}(t)$. Hur stort kan α maximalt väljas utan att förstärkningen från $n(t)$ till skattningen av $\dot{y}(t)$ överskrider ett? (5p)

Lösningsförslag till tentamen i TSRT03, TSRT19, TSRT22, Reglerteknik

Tentamensdatum: 2018-08-24

Svante Gunnarsson

1. (a) Relativa dämpningen ζ påverkar systemets dämpning, där ett litet värde ger stor översläng hos stegsvaret. ω_0 påverkar systemets snabbhet så att en fördubbling av ω_0 ger en halvering av stigtiden (för fixt ζ). Se ev s. 35-36 i boken för ett exempel.

   Alternativ (iii) och (iv) har samma ζ men olika ω_0, vilket gör att motsvarande stegsvar ska ha lika stor översläng, men (iv) ska vara dubbelt så snabbt som (iii). Detta ger oss **A - iv** och **B - iii**.

   Alternativ (i) och (ii) skiljer sig åt både vad gäller ζ och ω_0, men eftersom vi bara har två figurer kvar räcker det att jämföra ζ. (i) har $\zeta = 0.7$ som ger ett bättre dämpat stegsvar med liten översläng. (ii) har $\zeta = 0.1$, dvs dåligt dämpat som därför ger stor översläng hos stegsvaret. Detta ger oss **C - ii** och **D - i**.

   Svar: A - iv, B - iii, C - ii, D - i.

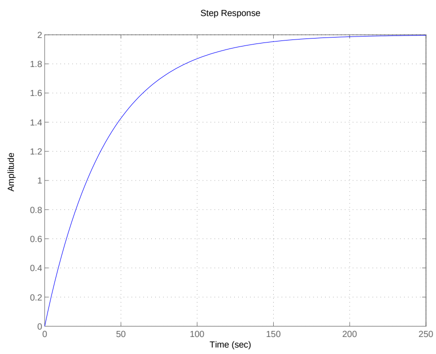
   (b) Laplacetransformering av diffekvationen (med antagandet att $y(0) = 0$) ger

$$\alpha s Y(s) = U(s) - \beta(Y(s) - V(t) \iff Y(s) = \frac{1}{\alpha s + \beta}U(s) + \frac{\beta}{\alpha s + \beta}V(s).$$

   Med $v(t) \equiv 0$ och $u(t)$ ett enhetssteg fås

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(\alpha s + \beta)s} = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{\beta(1 + \frac{\alpha}{\beta}s)s} = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{\beta(1 + Ts)s} = \frac{1}{\beta}(1 - e^{-t/T}) \to \frac{1}{\beta}, t \to \infty \text{ givet } \beta > 0.$$

   Inverstransformen hittas t ex via formelblad eller enklast genom att känner igen överföringsfunktionen i standardform $\frac{K}{sT+1}$ och lösningen till dess stegsvar. I figuren visas svaret för ett val av α och β (vars kvot ger en viss tidskonstant).



Figur 1: Figur för uppgift 1.b

   (c) Systemets pol ligger i höger halvplan, d v s systemet är instabilt. Det betyder att utsignalen går mot oändligheten när t växer.

2. (a) Från figuren i uppgiften fås

$$E(s) = -G(s)F(s)E(s) + R(s) - 0.2G(s)V(s)$$

vilket ger

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)}R(s) - \frac{0.2G(s)}{1+G(s)F(s)}V(s) = \frac{1}{1+G(s)K}R(s) - \frac{0.2G(s)}{1+G(s)K}V(s)$$

Det efterfrågade sambandet är alltså

$$E(s) = -0.2G(s)/(1+G(s)K)V(s)$$

(b) Eftersom störsignalen är sinusforman och systemet är linjärt fås att även reglerfelet blir sinusformat. Förstärkningen från störsignal till reglerfel ges därmed av

$$|\ 0.2G(0.1i)/(1+G(0.1i)K)\ |$$

Kravet i uppgiften innebär därmed att man ska välja K så att

$$|\ 0.2G(0.1i)/(1+G(0.1i)K)\ | \leq 0.1$$

Med de givna värdena fås kravet

$$K \geq \sqrt{3} - 0.2 \approx 1.53$$

(c) Med enbart proportionell återkoppling ges det återkopplade systemets karakteristiska ekvation av

$$10s + 0.2 + K_p = 0$$

vilket ger att systemet har en pol i

$$s = -\frac{(0.2 + K_p)}{10}$$

vilket ger -0.52 för $K_p = 5$ samt -0.12 för $K_p = 1$.
Med PI-återkoppling ges det återkopplade systemets karakteristiska ekvation av

$$s^2 + \frac{(0.2 + K_p)}{10}s + \frac{K_I}{10} = 0$$

vilket ger $-0.26 \pm i \cdot 0.18$ för $K_p = 5, K_I = 1$ samt $-0.06 \pm i \cdot 0.32$ för $K_p = 1, K_I = 1$.
Stegsvar A och D har stationära fel, alltså saknas integratorverkan, de måste därför paras med (ii) och (iv). Felet minskar snabbare med växande K_P, d v s systemets pol ligger längre till vänster i talplanet, så A – (ii), D – (iv).
För de två kvarvarande ger större K_P ett snabbare system som är mindre svängigt, jämför polernas placering, så B – (i), C – (iii).

3. (a)
- Återkopplingen gör nytta, i betydelsen att dämpa inverkan av störningen $v(t)$, för de vinkelfrekvenser där känslighetsfunktionens absolutbelopp är mindre än ett.
- Känslighetsfunktionens absolutbelopp är mindre än ett för $\omega < 2$ rad/s.
- Känslighetsfunktionens absolutbelopp är som störst omkring $\omega = 3$ rad/s, d v s där fungerar återkopplingen som sämst.

(b) Polerna kan placeras godtyckligt om systemet är styrbart. Systemet är styrbart om determinanten av styrbarhetsmatrisen, S, är skild från noll (Resultat 8.5 i boken).I detta fall fås

$$S = (B\ AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vilket ger att $\det S = 0$, d v s det återkopplade systemets poler kan ej placeras godtyckligt.

(c) Med en tillståndsåterkopplingen

$$u(t) = -Lx(t)$$

där

$$L = (l_1\ l_2)$$

ges det återkopplade systemets poler av

$$A - BL = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - l_1 & 3 - l_2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Det återkopplade systemet kommer därför att ha den karakteristiska ekvationen

$$(s - 1 + l_1)(s + 4) = 0$$

Följaktligen kan vi placera polerna så att en pol hamnar i -4 och den andra godtyckligt. Då den fasta polen ej ger upphov till instabilitet kan man alltså välja L så att det återkopplade systemet blir stabilt (alla poler i VHP).

4. (a) Vid proportionell reglering påverkar förstärkningen K endast amplitudkurvan hos $G_O(s)$ och inte faskurvan. Kravet på fasmarginalen $\phi_m \geq 30^o$ ger att vi ska söka den vinkelfrekvens där $\arg G_O(i\omega) = -150°$, vilket inträffar vid $w = 2$ rad/s. För att uppnå denna skärfrekvens ska man välja K så att

$$K \cdot \mid G(i \cdot 2) \mid = 1$$

vilket ger $K = \frac{1}{0.2} = 5$.

Faskurvan $\arg G_O(i\omega)$ passerar $-180°$ vid $\omega = 4$ oberoende av K. Med krav på $A_m = 2$ ska man välja K så att

$$K \mid G(i \cdot 4) \mid = 0.5$$

vilket ger $K = 8.3$. Sammantaget ger detta att K kan väljas som högst till $K = 5$.

(b) Med valet $K = 5$ fås följande resultat för reglerfelet i de två fallen, Enligt läroboken ges det stationära reglerfelet då referenssignalen är ett enhetssteg (Systemet är stabilt så vi kan använda slutvärdesteoreme) av

$$e_0 = \frac{1}{1 + F(0)G(0)}$$

och eftersom $G(s)$ innehåller en integration, d v s ett s i nämnaren, kommer stationära felet att bli noll, dvs $e_0 = 0$.

När referenssignalen är en enhetsramp fås på motsvarande sätt

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

Med

$$E(s) = \frac{1}{1 + FG} \frac{1}{s^2}$$

blir stationära felet $e_1 = \frac{8 \cdot 2}{10K} = \frac{8}{25} = 0.32$

(c) Krav

- $e_0 = 0$
- $e_1 = 0.01\frac{8}{25}$
- $\phi_m \geq 30^o$

Då lag-länken försämrar fasmarginalen med 6^o väljer vi K så att fasmarginalen utan lag-länk blir 36^o. Detta ger $K = \frac{1}{0.3} = 3.3$ ($w_c \approx 1.6$). Enligt tumregeln väljer vi $\tau_I = 10/1.6 \approx 6.25$.

Det stationära reglerfelet när referenssignalen är en enhetsramp och man använder lag-länken i uppgiften blir

$$e_1 = \frac{\gamma \cdot 16}{K \cdot 10}$$

och kravet att felet skall minskas till 0.01 av vad som erhölls med proportionell återkoppling ger kravet

$$\frac{\gamma \cdot 16}{K \cdot 10} < 0.01 \cdot 0.32$$

vilket ger $\gamma < 0.0066$. Detta ger

$$F(s) = 3.3 \frac{6.25s + 1}{6.25s + 0.0067}$$

5. (a) Med $J = 1$ fås ekvationen

$$\ddot{y}(t) = u(t)$$

Med de föreslagna tillståndsvariablerna fås

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

samt

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = u(t)$$

Genom att införa tillståndsvektorn

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

kan tillståndsmodellen skrivas som i uppgiften.

(b) Skattningsfelet är $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ och dess dynamik ges av $\dot{e}(t) = (A - KC)e(t)$. Polpolynomet som definierar polerna ges

$$\det\big(Is - (A - KC)\big) = \det\Big(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\Big)\Big) = \det\begin{pmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s \end{pmatrix} = s^2 + k_1 s + k_2$$

Önskat polpolynom är $(s + \alpha) = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2$. Vi får således $k_1 = 2\alpha$ och $k_2 = \alpha^2$.

(c) Effektivt så frågas det efter överföringsfunktionen från $n(t)$ till skattningen av $\dot{y}(t)$, och amplitudförstärkningen för denna överföringsfunktion i frekvensen 2. Vi har $\dot{y}(t) = x_2(t)$, och vi är således intresserade av överföringsfunktionen från $n(t)$ till $\hat{x}_2(t)$. Observatören definieras av

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(x_1(t) + n(t) - C\hat{x}) \\ &= (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Kx_1(t) + Kn(t) \end{aligned}$$

Överföringsfunktionen från $n(t)$ till $\hat{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{x}(t)$ ges enligt standard formel (med andra systemmatriser) av

$$\begin{aligned} H(s) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \big(Is - (A - KC)\big)^{-1} K \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \frac{sk_2}{s^2 + k_1 s + k_2} \\ &= \frac{s\alpha^2}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2} = \frac{s\alpha^2}{(s + \alpha)^2} \end{aligned}$$

Vi ser omedelbart att förstärkningen går mot noll både för låga och höga frekvenser. Det kommer dock finnas ett band av frekvenser där förstärkningen blir icke försumbar. I frekvensen 2 får vi kravet

$$\left| \frac{\alpha^2 \cdot 2i}{(2i + \alpha)^2} \right| < 1$$

dvs

$$\frac{2\alpha^2}{\sqrt{2^2 + \alpha^2}\sqrt{2^2 + \alpha^2}} < 1$$

vilket ger $\alpha^2 < 2^2$ och således $\alpha < 2$. **Svar:** Övre gräns ges av $\alpha < 2$. Dvs, observatören kan inte göras godtyckligt snabb, om man vill undvika att förstärka mätstörningar med frekvens 2 rad/s.