TENTAMEN I REGLERTEKNIK Y/D

SAL: KÅRA, G33

TID: 8 juni 2018, klockan 14 - 19

KURS: TSRT12, Reglerteknik Y/D

PROVKOD: TEN1

INSTITUTION: ISY

ANTAL UPPGIFTER: 5

ANTAL SIDOR PÅ TENTAMEN (INKLUSIVE FÖRSÄTTSBLAD): 10

ANSVARIG LÄRARE: Anders Hansson, tel 013-281681, 070-3004401

BESÖKER SALEN: 15:00, 17:00

KURSADMINISTRATÖR: Ninna Stensgård, tel 013-282225, ninna.stensgard@liu.se

TILLÅTNA HJÄLPMEDEL: Läroboken Glad-Ljung: ”Reglerteknik, grundläggande teori” med normala inläsningsanteckningar, tabeller, formelsamling, räknedosa utan färdiga program.

LÖSNINGSFÖRSLAG: Anslås efter tentamen på kursens hemsida.

VISNING av tentan enligt sneare E-mail

PRELIMINÄRA BETYGSGRÄNSER:	betyg 3	23 poäng
	betyg 4	33 poäng
	betyg 5	43 poäng

OBS! Lösningar till samtliga uppgifter ska presenteras så att alla steg (utom triviala beräkningar) kan följas. Bristande motiveringar ger poängavdrag.

Lycka till!

1. (a) Signalen $\sin 7t$ läggs på ingången till systemet

$$\frac{13}{s+8}$$

Vad blir utsignalen när alla transienter klingat av? (2p)

(b) Beräkna för systemet

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

en observatör sådan att observatörsfelets dynamik har polerna -1 och -2. (2p)

(c) Ett system beskrivs av sambandet

$$Y(s) = \frac{2}{s+5}U(s) + \frac{1}{s+4}V(s)$$

där U är insignal, Y är utsignal och V är en störning. Ange en framkoppling från V som eliminerar störningens inverkan på Y. (2p)

(d) Nedan visas Nyquistdiagrammet för ett system tillsammans med en del av enhetscirkeln. Använd diagrammet för att avläsa amplitud- och fasmarginal. (2p)

(e) För ett visst system påstås känslighetsfunktionen S och komplementära känslighetsfuktionen T uppfylla

$$S = \frac{5s}{s+2}, \quad T = \frac{3}{s+2}$$

Varför är detta ett orimligt påstående? (2p)

2. (a) Givet det instabila systemet

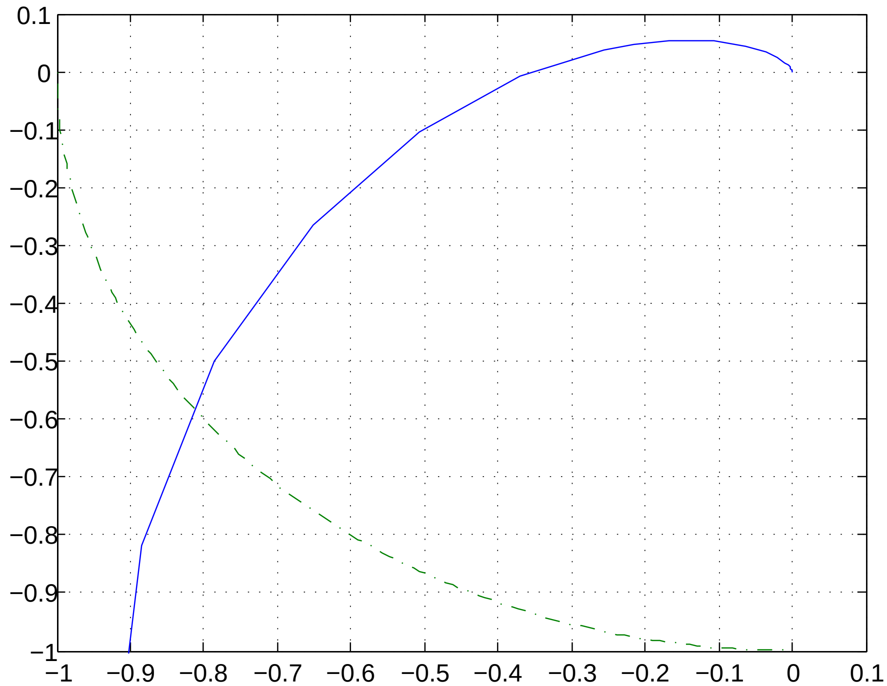
$$G(s) = \frac{4}{s-1}$$

Kan man stabilisera systemet med enbart en I-regulator? (2p)

(b) Kan man stabilisera systemet i deluppgift (a) med enbart en P-regulator? (2p)

(c) Vid uppvärmning av hus kan elementens och yttertemperaturens inverkan på inomhustemperaturen beskrivas av

$$T_i(s) = \frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{s+1}T_y(s) + U(s)\right)$$



Figur 1: Nyquistkurva till tal 1d.

där $T_i(s)$ är inomhustemperaturen, $T_y(s)$ är utomhustemperaturen och $U(s)$ elementens temperatur. Temperaturen $T_y(s)$ går att betrakta som en laststörning. Visa att en PI-regulator

$$U(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT}\right)(T_r(s) - T_i(s))$$

där referensevärdet $T_r(s)$ är önskad inomhustemperatur, elminierar en konstant laststörning i stationaritet, förutsatt att K och T är valda så att det återkopplade systemet är asymptotiskt stabilt. (2p)

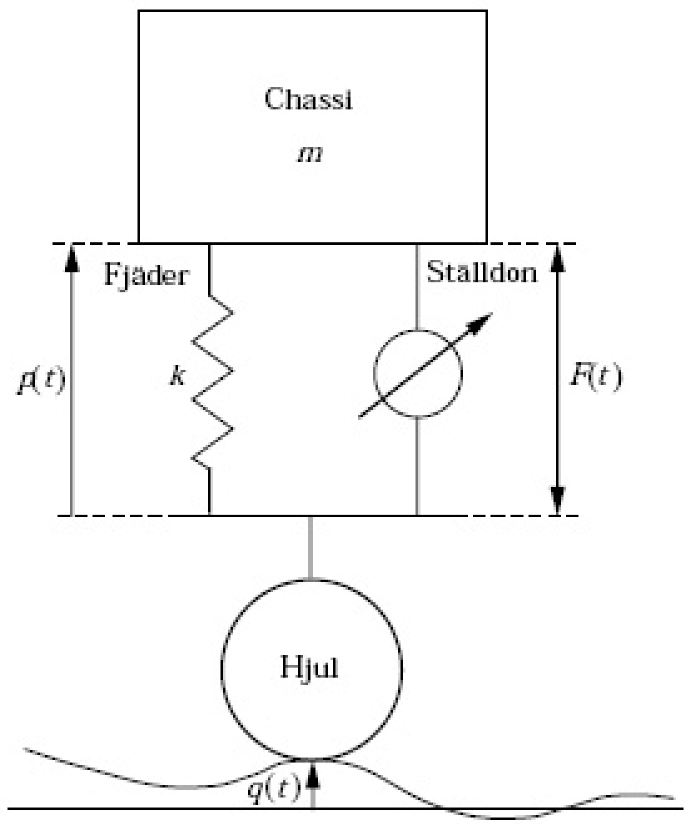
(d) Ett annat sätt att eliminera laststörningar kan vara att mäta störningen och göra framkoppling. Bestäm en framkoppling

$$U(s) = G(s)T_y(s) + T_r(s)$$

så att laststörningar $T_y(s)$ ej påverkar $T_i(s)$. (2p)

(e) Ofta kombinerar man framkoppling med återkoppling. Motivera detta genom att ange för- och nackdelar med såväl återkopplingen i (c) som framkopplingen i (d) med avseende på eliminering av laststörningar. (2p)

De följande uppgifterna handlar om aktiv reglering av hjulupphängningingen hos en bil. Som vanligt är i dessa sammanhang betraktas endast en fjärdedelsbb-il, d.v.s. hur ett enda hjul beter sig. Approximationer i förhållande till aktuell litteratur inom området är (1): hjulets massa relativt bilens massa försummas och (2): dynamiken i däcket försummas. En schematisk bild av hjulupphängningen ses i Figur 2.



Figur 2: Processbild av hjulupphängningen

Följande beteckningar kommer att användas:

Beteckning	Förklaring
$p(t)$	Fjäderns längd
$q(t)$	Vägens höjd
$F(t)$	Dämpande kraft (styrsignal)
$N(t)$	Vägens normalkraft mot däcket
p_0	Fjäderns otänjda längd
m	Bilens massa
g	Accelerationen vid fritt fall
$k,\ l$	Fjäderkonstanter

där det gäller att $0 < m < \infty$, $0 < g < \infty$, $0 < k < \infty$ och $0 < l < \infty$. Antag att den kraft fjädern ger upphov till ges av

$$k\left[p(t) - p_0\right] + l\left[p(t) - p_0\right]^3$$

Då gäller att hjulupphängningen kan beskrivas av följande differentialekvation

$$m\left[\frac{d^2p(t)}{dt^2} + \frac{d^2q(t)}{dt^2}\right] + k\left[p(t) - p_0\right] + l\left[p(t) - p_0\right]^3 + mg = F(t) \qquad (1)$$

Vidare ges vägens normalkraft mot däcket av

$$N(t) = F(t) - k\left[p(t) - p_0\right] - l\left[p(t) - p_0\right]^3 \qquad (2)$$

3. (a) Antag att $q(t) \equiv 0$. Bestäm för $F(t) \equiv mg$ de stationära värdena p^0 och N^0 för $p(t)$ respektive $N(t)$. (2p)

(b) Inför tillstånden $x_1(t) = p(t) - p^0$, $x_2(t) = dp(t)/dt$, insignalen $u(t) = F(t) - mg$, utsignalen $y(t) = N(t) - mg$, och störningen $v(t) = d^2q(t)/dt^2$. Visa att om (1) och (2) linjäriseras kring de stationära punkterna givna av föregående uppgift så blir de linjäriserade ekvationerna

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + B_1u(t) + B_2v(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad (3)$$

där $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$ och

$$\begin{aligned} &A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &C = \begin{bmatrix} -k & 0 \end{bmatrix}; \quad D = 1 \end{aligned} \qquad (4)$$

(4p)

(c) Visa att överföringsfunktionen från u till y i (3) då $k = m = 1$ ges av

$$\frac{s^2}{s^2 + 1}$$

(2p)

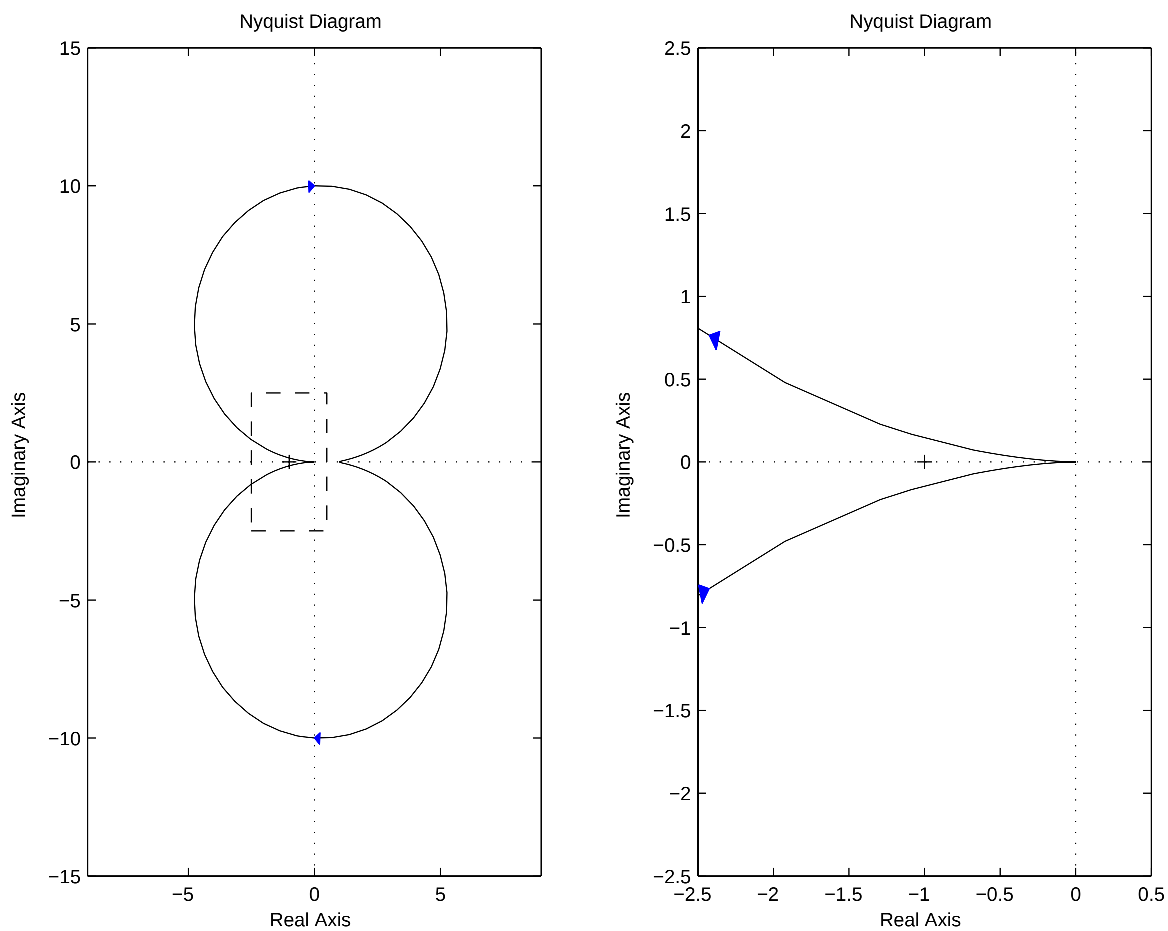
(d) Rita Bodediagrammet för överföringsfunktionen i föregående deluppgift. Två tomma bodediagram finns längst bak i tentamen, riv loss sidan och lämna in tillsammans med övriga lösningar. Markera noggrant vilken sida som innehåller ditt svar om du använder båda sidorna. (2p)

4. (a) Är systemet definierat av (A, B_1) i (4) styrbart? (2p)

   (b) Motivera varför noll är det enda rimliga konstanta referensvärdet för y. (2p)

   (c) Kan man göra slutna systemet i (3) asymptotiskt stabilt med regulatorn $u(t) = -l_1 x_1(t)$ för något val av l_1? (2p)

   (d) I Figur 3 ses Nyquistdiagrammet för överföringsfunktionen från u tills y då man beaktat dämpning i systemet. För vilka positiva värden på förstärkningen K hos en P-regulator $u(t) = -Ky(t)$ är slutna systemet stabilt? (4p)



Figur 3: Nyquistkurva för systemet i uppgift 4(d). Till vänster syns Nyquistkurvan, till höger syns en inzoomad del av kurvan. Den inzoomade delen är markerad med en streckad kurva i den vänstra figuren.

5. Betrakta observatören

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + B_1 u(t) + K\left[y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)\right]$$

Låt observationsfelet ges av $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

(a) Visa att

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = (A - KC)\tilde{x}(t) + B_2 v(t)$$

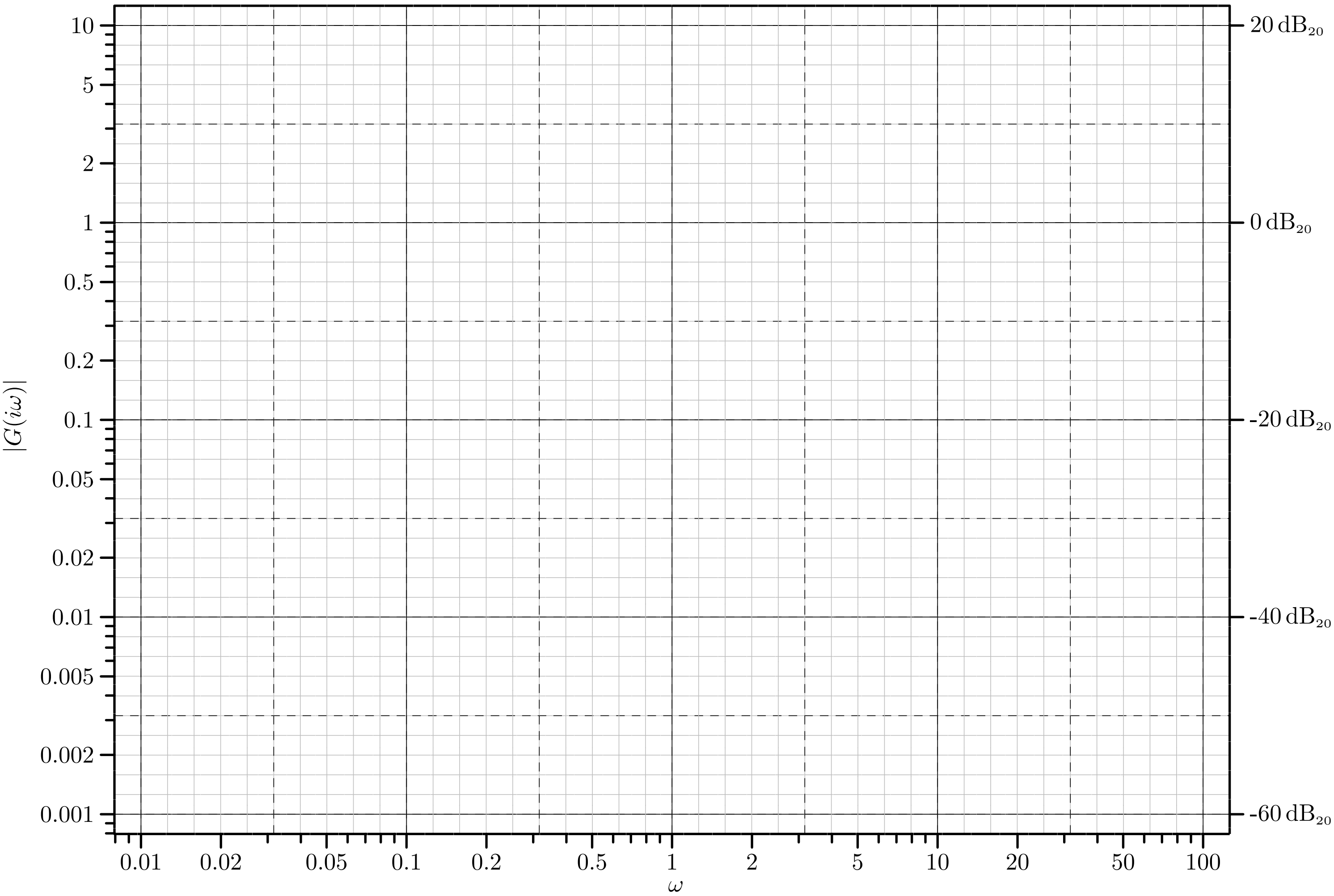
(2p)

(b) Visa att $A_o = A - KC$ har alla egenvärden strikt i vänster halvplan om och endast om

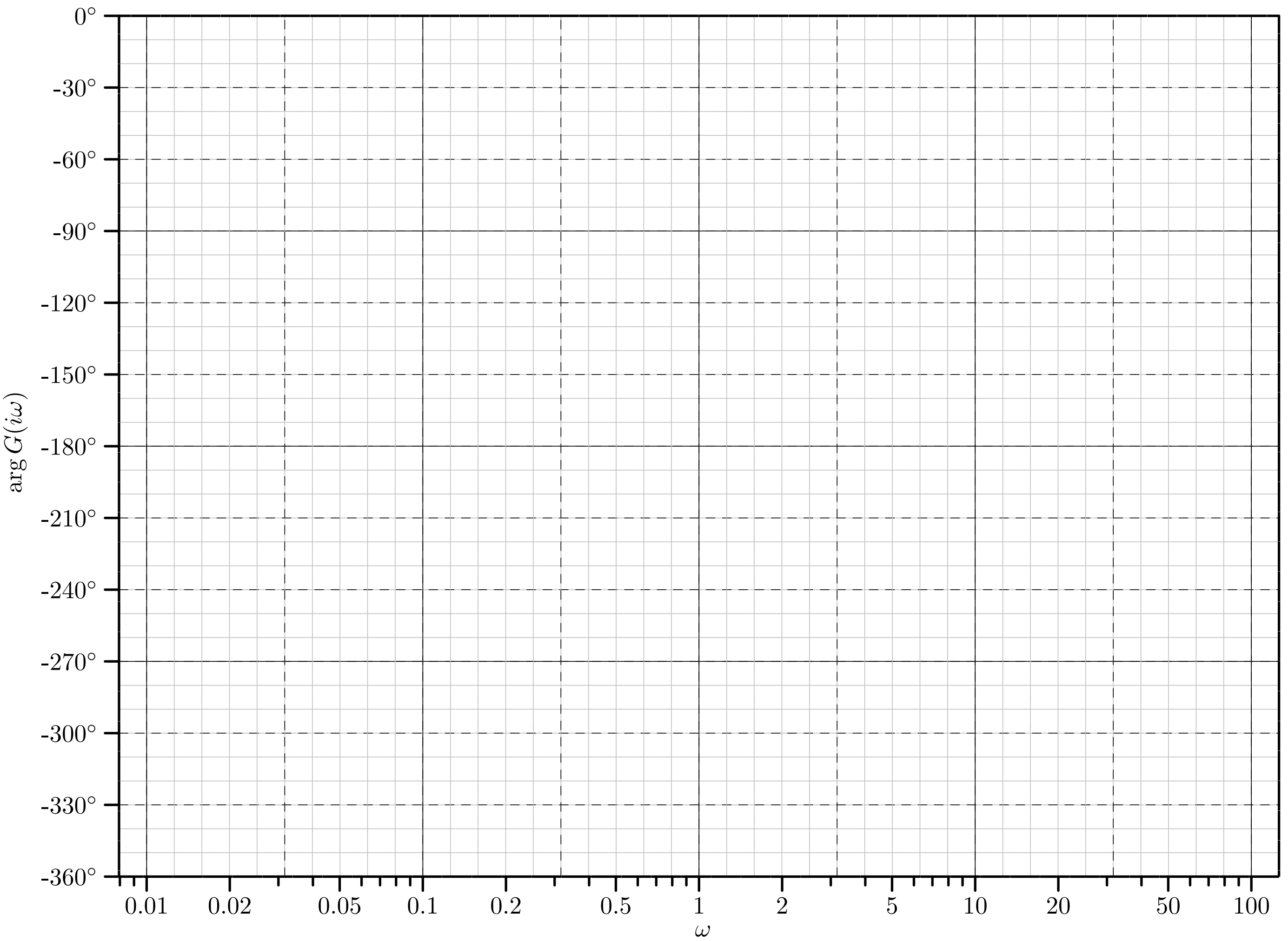
$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

väljes så att $k_1 < 0$ och $k_2 < 1/m$. (3p)

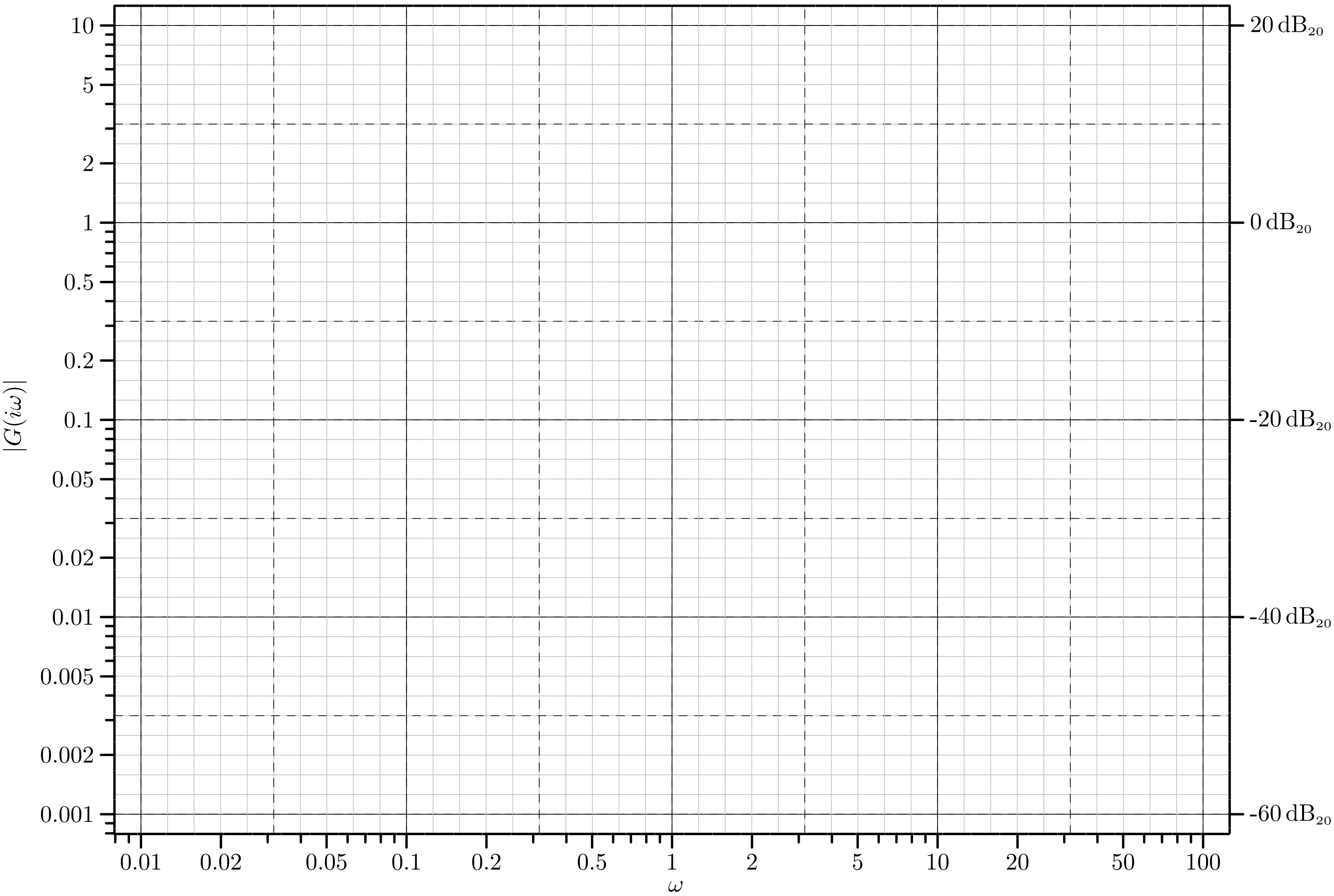
(c) Antag att $k = m = 1$. Låt $v(t) = \sin t$. För vilka val av k_1 och k_2 i (5) gäller att amplituderna av $\tilde{x}_1(t)$ och $\tilde{x}_2(t)$ båda är mindre än eller lika med 0.1 i stationaritet? (5p)



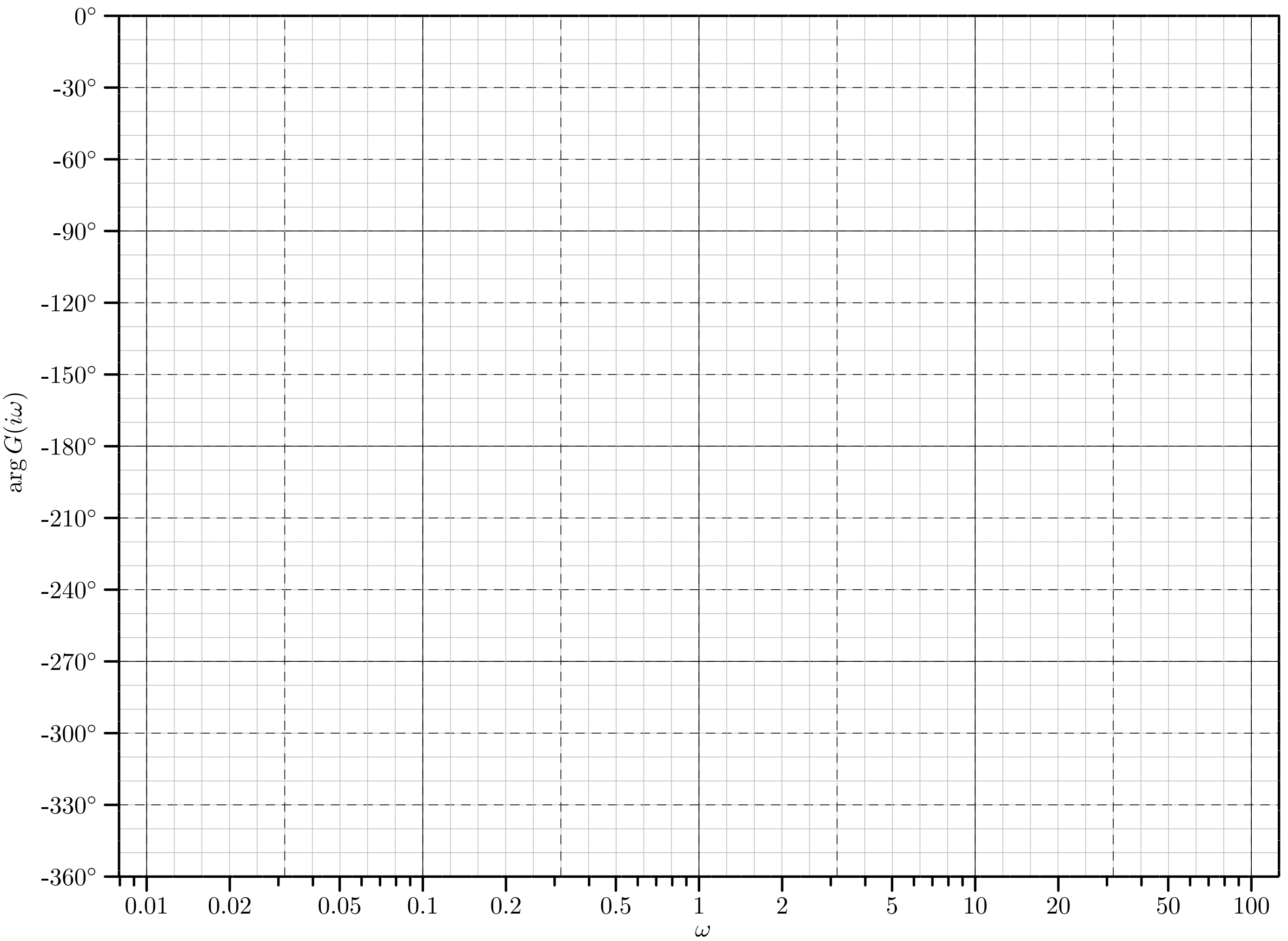
10
5
2
1
0.5
0.2
0.1
0.05
0.02
0.01
0.005
0.002
0.001
$|G(i\omega)|$
20 dB$_{20}$
0 dB$_{20}$
-20 dB$_{20}$
-40 dB$_{20}$
-60 dB$_{20}$
0.01 0.02 0.05 0.1 0.2 0.5 1 2 5 10 20 50 100
ω



0°
-30°
-60°
-90°
-120°
-150°
-180°
-210°
-240°
-270°
-300°
-330°
-360°
$\arg G(i\omega)$
0.01 0.02 0.05 0.1 0.2 0.5 1 2 5 10 20 50 100
ω



10
5
2
1
0.5
0.2
0.1
0.05
0.02
0.01
0.005
0.002
0.001
$|G(i\omega)|$
20 dB$_{20}$
0 dB$_{20}$
-20 dB$_{20}$
-40 dB$_{20}$
-60 dB$_{20}$
0.01
0.02
0.05
0.1
0.2
0.5
1
2
5
10
20
50
100
ω



0°
-30°
-60°
-90°
-120°
-150°
-180°
-210°
-240°
-270°
-300°
-330°
-360°
$\arg G(i\omega)$
0.01
0.02
0.05
0.1
0.2
0.5
1
2
5
10
20
50
100
ω

Lösningar till tentamen i Reglerteknik (TSRT12)

Tentamensdatum: 8 juni 2018

1. (a) Sinus in ger sinus ut eftersom systemet är linjärt och stabilt.

$$y(t) = |G(7i)| \sin(7t + \arg G(7i))$$

$$|G(7i)| = \frac{13}{\sqrt{8^2+7^2}} = \frac{13}{\sqrt{113}} = 1.22$$
$$\arg G(7i) = \arg 13 - \arg(7i+8) = 0 - \arctan\left(\frac{7}{8}\right) = -0.72$$

Svar: $y(t) = 1.22 \sin(7t - 0.72)$

(b) Observatörsfelet: $\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$ där $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}^T$. Polpolynomet för observatörsfelet ges av

$$\det(\lambda I - (A - KC)) = \begin{vmatrix} \lambda + k_1 & -1 \\ k_2 - 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + k_1\lambda + k_2 - 2$$

Det önskade polpolynomet ges av $\lambda^2 + 3\lambda + 2$. Identifiering ger $k_1 = 3$ och $k_2 = 4$.

(c) Låt $G(s) = \frac{2}{s+5}$ och $H(s) = \frac{1}{s+4}$. Enligt (7.11) i boken är framkopplingen $F_f = -\frac{H(s)}{G(s)} = -\frac{s+5}{2(s+4)}$

(d) Figur 5.2 i boken ger

$$\varphi_m = \arctan\left(\frac{0.5}{0.7}\right) = 0.62 \text{ rad} = 35.5°$$
$$A_m = \frac{1}{0.35} = 2.86$$

(e) S och T måste uppfylla $S + T = 1$. Här är $S + T = \frac{5s+3}{s+2} \neq 1$

2. (a) Nej. Ansätt $F(s) = K_I/s$ och ta fram $G_c(s)$. Det karakteristiska polynomet tar formen $s^2 - s + 4K_I$ och ger poler till det slutna systemet i $s = 0.5 \pm \sqrt{0.25 - 4K_I}$. Vilka alltid ligger i höger halvplan. Systemet kan därmed inte stabiliseras av en I-regulator.

(b) Ja. Med ansatsen $F(s) = K_P$, fås polerna $s = 1 - 4K_P$ till det slutna systemet. $K_P > 0.25$ ger därför ett stabilt slutet system.

(c)

$$U(s) = K(1 + \frac{1}{sT})(T_r(s) - T_i(s))$$

Lineariteten ger att man kan sätta $T_r(s)$ till 0. Efter lite räkningar fås

$$T_i(s) = \frac{sT}{s(s+1)^2T + K(s+1)(sT+1)} T_y(s)$$

Förutsättningarna för slutvärdesteoremet är uppfyllda, och med $T_y(s) = 1/s$ fås

$$\lim_{t\to\infty} T_i(t) = \lim_{s\to 0} s \frac{sT}{s(s+1)^2T + K(s+1)(sT+1)} \frac{1}{s} = 0$$

v.s.v.

(d) Lineariteten gör att man kan sätta $T_r(s)$ till 0. Om bidraget från en laststörning i $T_y(s)$ ej ska påverka $T_i(s)$ krävs att

$$\frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{s+1}T_y(s) + G(s)T_y(s)\right) = 0.$$

Välj därför

$$G(s) = -\frac{1}{s+1}.$$

(e) Fördelen med PI-reglering framför framkoppling är att man bättre kommer att eliminera inverkan av mätfel och modelfel i stationäritet. Fördelen med framkoppling framför PI-reglering är att man tar hand om laststörningar snabbare. Man behöver inte "vänta" med att höja temperaturen på elementen tills det att det börjar bli kallt inomhus, utan kan höja den redan då man märker att det börjar bli kallt utomhus.

3. (a) Vid stationaritet är $d^2p(t)/dt^2 = 0$ och från uppgiften är det givet att $F(t) = mg$ och $q(t) = 0$. Insättning i ekvationerna (1) och (2) i tentamen ger $N^0 = mg$ och $p^0 = p_0$.

(b) Det gäller att

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t)\\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{l}{m}x_1^3(t) + \frac{1}{m}u(t) - v(t)\\ y(t) &= -kx_1(t) - lx_1^3(t) + u(t)\end{aligned}$$

Notera att de stationära värdena för $x_1(t)$ och $x_2(t)$ båda är noll. Linjärisering av $x_1^3(t)$ kring noll ger noll. Alltså ges de linjäriserade ekvationerna av

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t)\\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -\frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}u(t) - v(t)\\ y(t) &= -kx_1(t) + u(t)\end{aligned}$$

som kan skrivas på matrisform som i uppgiften.

(c) Överföringsfuntionen från u till y ges av

$$C(sI - A)^{-1}B_1 + D = \frac{s^2}{s^2 + k/m}$$

(d)

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{s^2}{s^2+1}\\ G(i\omega) &= \frac{(i\omega)^2}{(i\omega)^2+1} = \frac{(i\omega)^2}{(i\omega+i)(i\omega-i)}\\ |G(i\omega)| &= \left|\frac{\omega^2}{(\omega+1)(\omega-1)}\right|\end{aligned}$$

Lågfrekvensasymptoten har lutningen +2. Det gäller att $\omega \to \infty \Rightarrow |G(i\omega)| \to 1$, och högfrekvensasymptoten har lutningen 0. Notera singulariteten i $\omega = 1$. Denna ger upphov till oändlig förstärkning vid frekvensen 1. Det hjälper även att räkna ut numeriska värden i ett antal punkter, se tabell 1.

Tabell 1: $|G(i\omega)|$

ω	0.03	0.3	2	3
$\lvert G(i\omega)\rvert$	0.0009	0.009	1.33	1.125

$$\begin{aligned}\arg(\mathrm{G}(\mathrm{i}\omega)) &= \arg(\mathrm{i}\omega) + \arg(\mathrm{i}\omega) - \arg(\mathrm{i}\omega + \mathrm{i}) - \arg(\mathrm{i}\omega - \mathrm{i}) && (1)\\ &= 90^\circ + 90^\circ - 90^\circ - \arg(\mathrm{i}(\omega - 1)) && (2)\\ &= 90^\circ - \begin{cases} -90^\circ & \omega < 1\\ 0^\circ & \omega = 1\\ 90^\circ & \omega > 1\end{cases} = \begin{cases} 180^\circ & \omega < 1\\ 90^\circ & \omega = 1\\ 0^\circ & \omega > 1\end{cases} && (3)\end{aligned}$$

Singulariteten ger alltså upphov till en diskontinuitet i faskurvan. Följande resonemang kring faskurvan är godkänt, men är ej helt korrekt.

$$
\begin{aligned}
G(i\omega) &= \frac{(i\omega)^2}{(i\omega)^2+1} = \frac{\omega^2}{\omega^2-1} & (4)\\
\arg(\mathrm{G}(\mathrm{i}\omega)) &= \arg\left(\omega^2\right) - \arg\left(\omega^2-1\right) = 0^\circ - \arg\left(\omega^2-1\right) = & (5)\\
&= -\begin{cases} 180^\circ & \omega^2 < 1 \\ 0^\circ & \omega^2 \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} -180^\circ & \omega^2 < 1 \\ 0^\circ & \omega^2 \geq 1 \end{cases} & (6)
\end{aligned}
$$

4. (a) Det gäller att styrbarhetsmatrisen ges av

$$W_s = \begin{bmatrix} B_1 & AB_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/m \\ 1/m & 0 \end{bmatrix}$$

som har full rang ($\det(\mathrm{W_s}) \neq 0$) eftersom $0 < m < \infty$. Alltså är systemet definierat av (A, B_1) styrbart.

(b) Överföringsfunktionen från u till y i uppgift 4 har två nollställen i origo. Med slutvärdesteoremet visas enkelt att stationära värdet för $y(t)$ är skilt från noll endast om $U(s)$ har tre eller fler poler i origo, vilket inte är rimligt. Betrakta exemplevis $U(s) = 1/s^n \Rightarrow u(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \Rightarrow F(t) = mg + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$. Det är inte rimligt att den dämpande kraften ökar med tiden på detta vis.

Från uppgifterna 3(a) och 3(b) ser man även att det stationära värdet för $y(t) = N(t) - mg$ är noll oberoende av vad insignalen u är.

(c) Med $L = \begin{bmatrix} l_1 & 0 \end{bmatrix}$ ges det slutna systemet av

$$A_c = A - B_1 L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(k+l_1)/m & 0 \end{bmatrix}$$

Vidare gäller att $\det(sI - A_c) = s^2 + (k+l_1)/m = 0$ som har två rötter längs imaginäraxeln för alla $l_1 \geq -k$, ty $m > 0$ och $k > 0$. Om $l_1 < -k$ så fås två reella poler i $\pm\sqrt{-\frac{1}{m}(k+l_1)}$ Alltså kan man inte göra slutna systemet asymptotiskt stabilt.

(d) I Nyquistdiagrammet syns att kurvan aldrig skär negativa reella axeln. Därför kommer det slutna systemet vara stabilt för alla positiva värden på K.

5. (a) Det gäller att

$$
\begin{aligned}
\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = Ax(t) + B_1 u(t) + B_2 v(t) \\
&\quad - A\hat{x}(t) - B_1 u(t) - K\left[y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)\right] \\
&= A\tilde{x}(t) + B_2 v(t) - KC\tilde{x}(t)
\end{aligned}
$$

vilket skulle visas.

(b) Det gäller att $\det(\lambda I - A_o) = \lambda^2 - k_1 k\lambda + k(1/m - k_2) = 0$, som har alla nollställen strikt i vänster halvplan om och endast om $kk_1 < 0$ och $k(1/m - k_2) > 0$. Eftersom $k > 0$ fås villkoren i uppgiften.

(c) Det gäller att

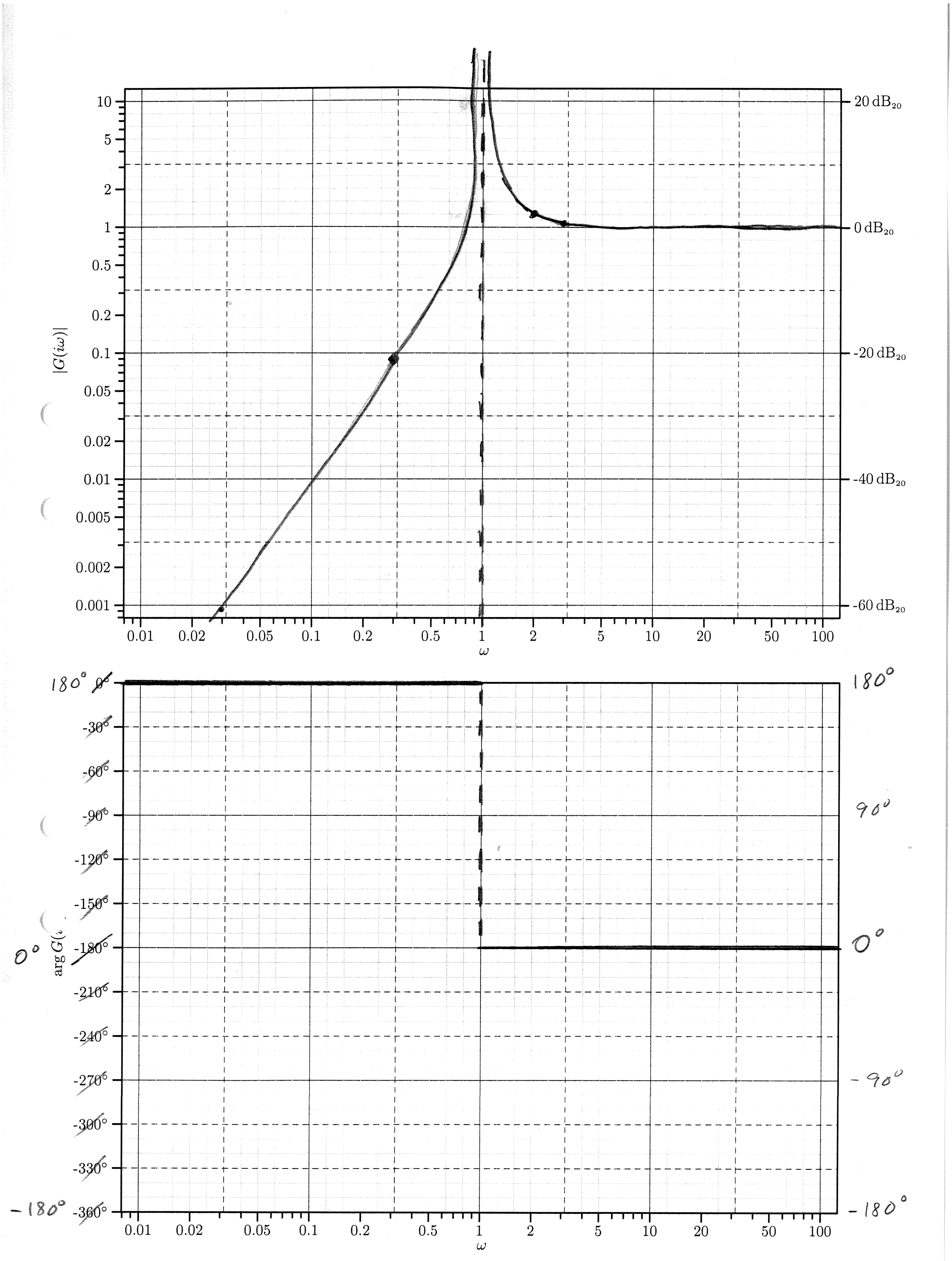
$$\tilde{X}(s) = (sI - A_o)^{-1} B_2 V(s) = \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} V(s)$$

Amplituderna i stationaritet hos $\tilde{x}_1(t)$ och $\tilde{x}_2(t)$ ges av $|H_1(i)|$ respektive $|H_2(i)|$ (frekvensen på $v(t)$ är ett), under förutsättning att egenvärdena till A_o ligger strikt i vänster halvplan. Vidare gäller att

$$
\begin{aligned}
H_1(s) &= \frac{-1}{s^2 - k_1 s - k_2 + 1} \\
H_2(s) &= \frac{-(s - k_1)}{s^2 - k_1 s - k_2 + 1}
\end{aligned}
$$

Att amplituderna är mindre än eller lika med 0.1 i stationaritet är ekvivalent med att

$$
\begin{aligned}
|H_1(i)|^2 &= \frac{1}{k_1^2 + k_2^2} \leq 0.1^2 \\
|H_2(i)|^2 &= \frac{1 + k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \leq 0.1^2
\end{aligned}
$$



Figur 1: Uppgift 3d.

vilket också kan skrivas

$$
\begin{aligned}
k_1^2 + k_2^2 &\geq 10^2 \qquad (7)\\
k_1^2 + k_2^2 &\geq 10^2(k_1^2 + 1) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Det första villkoret är uppfyllt om det andra är det. Villkoren för att A_o ska ha alla egenvärden strikt i vänster halvplan är, se föregående uppgift, $k_1 < 0$ och $k_2 < 1/m = 1$. Villkor (8) tillsammans med $k_2 < 1/m = 1$ ger villkoret $k_2 \leq -\sqrt{99k_1^2 + 100}$.

Följande villkor är nödvändiga och tillräckliga för det som efterfrågas i uppgiften:

$$
\begin{aligned}
k_1 &< 0\\
k_2 &\leq -\sqrt{99k_1^2 + 100}
\end{aligned}
$$