TENTAMEN I REGLERTEKNIK Y/D

SAL: TER 1, TER 2, TER E

TID: 14 mars 2018, klockan 8 - 13

KURS: TSRT12, Reglerteknik Y/D

PROVKOD: TEN1

INSTITUTION: ISY

ANTAL UPPGIFTER: 5

ANTAL SIDOR PÅ TENTAMEN (INKLUSIVE FÖRSÄTTSBLAD): 7

ANSVARIG LÄRARE: Anders Hansson, tel 013-281681, 070-3004401

BESÖKER SALEN: 09:00, 11:00

KURSADMINISTRATÖR: Ninna Stensgård, tel 013-282225, ninna.stensgard@liu.se

TILLÅTNA HJÄLPMEDEL: Läroboken Glad-Ljung: ”Reglerteknik, grundläggande teori” med normala inläsningsanteckningar, tabeller, formelsamling, räknedosa utan färdiga program.

LÖSNINGSFÖRSLAG: Anslås efter tentamen på kursens hemsida.

VISNING av tentan äger rum 2017-04-12 kl 12.30-13.00 i Ljungeln, B-huset, ingång 27, A-korridoren till höger.

PRELIMINÄRA BETYGSGRÄNSER:	betyg 3	23 poäng
	betyg 4	33 poäng
	betyg 5	43 poäng

OBS! Lösningar till samtliga uppgifter ska presenteras så att alla steg (utom triviala beräkningar) kan följas. Bristande motiveringar ger poängavdrag.

Lycka till!

1. (a) Ett system beskrivs av sambandet

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

där

$$G(s) = \frac{\beta}{s + \alpha}$$

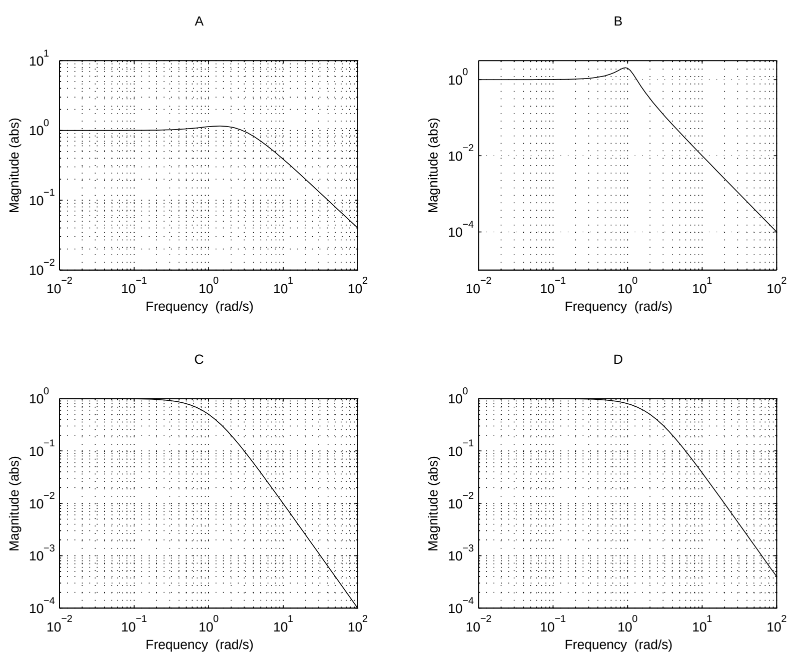
och $\beta \neq 0$. Antag att insignalen är ett steg med amplituden u_0. Ange $y(t)$ då $t \to \infty$. (3p)

(b) Betrakta de fyra överföringsfunktionerna nedan.

$$G_1(s) = \frac{4}{(s+2)^2} \qquad G_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{(s^2+s+1)} \qquad G_4(s) = \frac{4(s+1)}{(s+2)^2}$$

I figuren nedan visas amplitudkurvorna för dessa överföringsfunktioner. Kombinera kurvorna med överföringsfunktionerna. (4p)



Figur 1: Amplitudkurvor till uppgift 1 b.

(c) Ett mekaniskt system består av en massa och en fjäder. Massan rör sig på ett plan och rörelsen beskrivs av differentialekvationen

$$m\ddot{y}(t) = u(t) - f\dot{y}(t) - ky(t)$$

där $u(t)$ är kraften som verkar på massan och $y(t)$ är massans position, vilken betraktas som utsignal. Konstanterna m, f och k betecknar massa, friktionskoefficient respektive fjäderkonstant. Inför tillståndsvariablerna $x_1(t) = y(t)$ och $x_2(t) = \dot{y}(t)$ och ställ upp modellen på tillståndsform på formen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad y(t) = Cx(t)$$

Antag att $m = k = 1$ och $f = 0.2$. Ange absolutbelopp och relativ dämpning för modellens poler. (3p)

2. En regulator skall konstrueras till en ny produkt. Vid matematisk modellering av systemet $Y(s) = G(s)U(s)$ misstänker man att det smugit sig in en del misstag, så man vet inte riktigt hur systemet ser ut. Man har fyra alternativ

$$(i) \quad G(s) = \frac{1}{s+1} \qquad (ii) \quad G(s) = \frac{1}{s-1}$$
$$(iii) \quad G(s) = \frac{1}{-s+1} \qquad (iv) \quad G(s) = \frac{1}{-s-1}$$

(a) Hur skiljer sig de fyra modellernas Bodediagram åt (det räcker med en kvalitativ beskrivning) (2p)

(b) Om man vet att utsignalen konvergerar till en konstant nivå då ett steg läggs på insignalen, vilka modeller kan det då vara? (2p)

(c) Om man vet att systemet konvergerar till 1 då ett enhetssteg läggs på insignalen, vilka modeller kan det då vara? (1p)

(d) Kan man skapa en P-regulator $U(s) = K(R(s) - Y(s))$ som är robust nog att stabilisera alla fyra system? (3p)

(e) Man chansar och installerar en I-regulator $U(s) = \frac{1}{s}(R(s) - Y(s))$ och noterar att slutna systemet blev stabilt. Vilken eller vilka av de fyra modellerna kan vara korrekt? (2p)

3. En byggfirma i Linköping har fått i uppgift att bygga in en hiss i ett flerfamiljshus i Valla. Firman som bygger hissen har en modell av hur hissen beter sig då den ska stå still vid en viss våning. Överföringsfunktionen från momentreferens på den elektriska motorn som driver hissen till hissens läge ges av

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k}$$

Där m är hissens massa, d dämpningen i hissens wire och k är linans fjäderkonstant.

(a) För att få hissen väl dämpad så vill hissfirman att det slutna systemets poler ska ligga i $-\frac{3}{2}$. Använd en PD-regulator, $F(s) = K_P + K_D s$, för att åstadkomma detta. Antag att $m = 1$, $d = 1$ och $k = 1$. (3p)

(b) Antag att hissen står på den lägsta våningen i huset och att det gör att 10 gånger så mycket lina är utrullad jämfört med vid beräkningen av regulatorn i b). Fjäderkonstanten blir alltså lika med $k/10$. För vilka värden på K_P och K_D är hissen stabil? Fungerar fortfarande regulatorn i a)? (3p)

(c) Tag fram en tillståndsmodell till systemet $G(s)$ och gör tillståndsåterkoppling så att det slutna systemets poler hamnar i $-\frac{3}{2}$. Antag att $m = 1$, $d = 1$ och $k = 1$. (4p)

4. Läshuvudet hos en hårddisk styrs via en mekanisk arm, vars rörelse kan modelleras med överföringsfunktionen

$$Y(s) = \frac{5}{(\tau_1 s + 1)} \cdot \frac{0.05}{s(s\tau_2 + 1)} U(s)$$

där $Y(s)$ och $U(s)$ är laplacetransformerna av armens vinkel respektive inspänningen till den elektriska motor som skapar momentet som vrider armen. Vidare gäller att $\tau_1 = 10^{-3}$ och $\tau_2 = 0.05$. Systemets bodediagram ges på nästa sida.

(a) Antag inledningsvis att armen styrs med proportionell återkoppling

$$U(s) = K(R(s) - Y(s))$$

Ange felkoefficienterna e_0 respektive e_1. För vilka K är felkoefficienterna definierade? (4p)

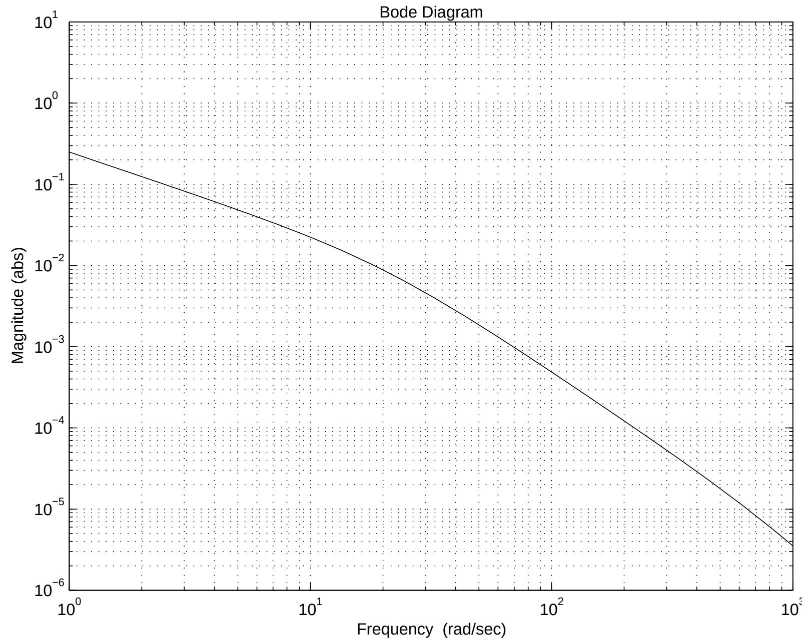
(b) Bestäm en återkoppling

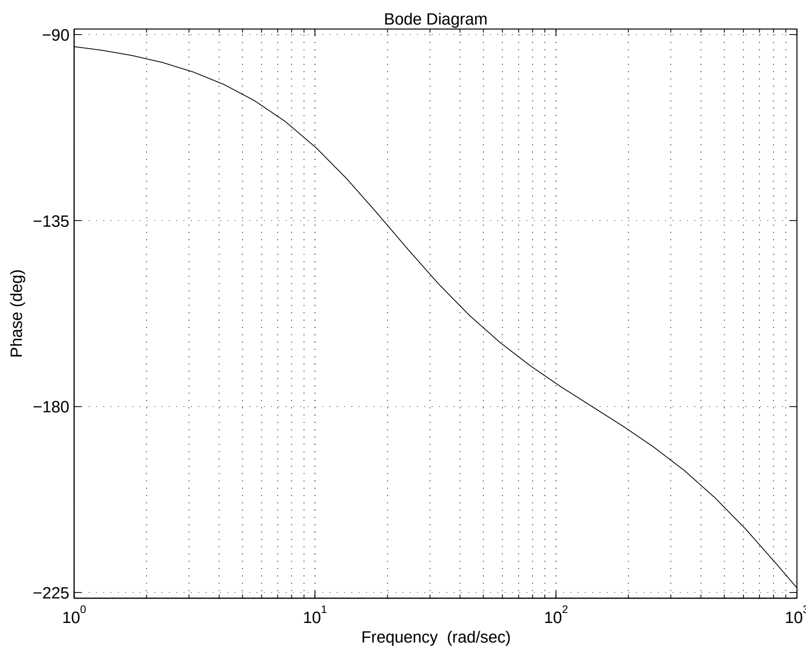
$$U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$$

för systemet ovan, sådan att reglersystemet uppfyller följande krav:

- $e_0 = 0$.
- $e_1 \leq 0.001$
- $\omega_c = 100$ rad/s.
- $\phi_m \geq 50°$

(6p)


Bode Diagram
Magnitude (abs)
Frequency (rad/sec)


Bode Diagram
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)

5. En cykel beskrivs (efter lämplig skalning av variabler och tid) av modellen

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} V \\ V^2/2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Här är x_1 lutningsvinkel, x_2 rörelsemängdsmoment kring längdaxeln, u styrets vridningsvinkel och V hastigheten framåt ($V > 0$).

(a) Beräkna systemets poler. Hur beror de på V? (1p)

(b) Beräkna för allmänt V en tillståndsåterkoppling som placerar systemets egenvärden i -2, -2 (referenssignalen antas vara 0). (2p)

(c) Visa att det finns ett positivt värde V^* på V sådant att vissa av de koefficienter som beräknats i b) växer obegränsat när $V \to V^*$. Ange ett numeriskt värde på V^*. (2p)

(d) Varför går det inte att placera egenvärdena godtyckligt när $V = V^*$? (1p)

(e) Antag att $V = V^*$. Visa att även om egenvärdena inte går att placera godtyckligt så är det alltid möjligt att stabilisera systemet. Ange en sådan stabiliserande tillståndsåterkoppling. (4p)

Lösningar till tentamen i Reglerteknik (TSRT12)

Tentamensdatum: 14 mars 2018

1. (a) Systemet $G(s)$ är stabilt för $\alpha > 0$ och instabilt för $\alpha < 0$. För $\alpha = 0$ är systemet en integrator. Det innebär att stegsvaret $y(t)$ går mot ett stabilt slutvärde endast då $\alpha > 0$. För $\alpha > 0$ gäller slutvärdesteoremet

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{\beta}{s+\alpha}\frac{u_0}{s} = \frac{\beta u_0}{\alpha}$$

Om $\alpha \leq 0$ så följer det att $|y(t)| \to \infty$ då $t \to \infty$.

(b) Samtliga system har två poler och stationär förstärkning 1.

$G_4(s)$ är det enda systemet som har ett nollställe varför den kommer ha lutningen -1 för stora värden på ω. Den enda amplitudkurvan som har lutningen -1 är A. Således $G_4(s) = A$.

$G_3(s)$ har ett komplexkonjugerat polpar i $-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Ett sådant system ger en översläng vilket betyder att vissa frekvenser måste ha större förstärkning än 1. Den enda kvarvarande amplitudkurvan som uppfyller detta krav är B. Således $G_3(s) = B$.

$G_1(s)$ och $G_2(s)$ har samma principiella form eftersom de har samma antal poler och nollställen, endast reella dubbelpoler och samma stationära förstärkning. Dock kommer $G_1(s)$ ha större bandbredd än $G_2(s)$ eftersom $G_1(s)$ har sina poler längre in i vänster halvplan än $G_2(s)$. Högre bandbredd betyder att amplitudkurvan bryter av först vid högre frekvenser. Således är $G_1(s) = D$ och $G_2(s) = C$.

(c) Systemet är $m\ddot{y}(t) = u(t) - f\dot{y}(t) - ky(t)$. Tillstånden

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned}$$

har därmed derivatorna

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{m}(u(t) - fx_2(t) - kx_1(t)) \end{aligned}$$

som kan skrivas på formen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -f/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Med värdena $m = k = 1$ och $f = 0.2$ insatta får vi systemet

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

För att ta fram absolutbeloppet och den relativa dämpningen för modellens poler behöver vi överföringsfunktionen.

Ett sätt att ta fram den är att laplacetransformera ovanstående modell och eliminera $X(s)$ enligt $Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s)$. Detta ger oss

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \Leftrightarrow \\ G(s) &= \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ett annat sätt är att gå tillbaka till den ursprungliga differentialekvationen och laplacetransformera denna. Båda metoderna ger samma resultat.

Sidan 37 i Glad&Ljung och (1) ger oss sedan absolutbeloppet $\omega_0 = 1$ och den relativa dämpningen $\zeta = 0.1$.

2. (a) Alla modellerna har samma amplitudkurva då förstärkningen $|G(i\omega)|$ ges av $\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$. De fyra modellerna har däremot olika faskurvor.

   (b) System (i) och (iv) har en pol i -1 och är således strikt stabila med konvergerande stegsvar. System (ii) och (iii) har däremot pol i 1 vilket leder till instabila stegsvar.

   (c) För att utsignalen skall konvergera till 1 krävs enligt slutvärdesteoremet, som antar stabilitet, att $G(0) = 1$. (i) är således den enda möjliga kandidaten.

   (d) Slutna systemet $\frac{KG}{1+KG}$ blir efter förenkling

$$(i)\ \frac{K}{s+1+K} \quad (ii)\ \frac{K}{s-1+K}$$
$$(iii)\ \frac{K}{-s+1+K} \quad (iv)\ \frac{K}{-s-1+K}$$

   Stabilitet i fallet (ii) kräver $K > 1$ samtidigt som stabilitet för (iii) kräver $K < -1$. Det går således ej stabilisera alla fyra modeller med samma P-regulator.

   (e) Slutna systemet $\frac{\frac{1}{s}G}{1+\frac{1}{s}G}$ blir efter förenkling

$$(i)\ \frac{1}{s^2+s+1} \quad (ii)\ \frac{1}{s^2-s+1}$$
$$(iii)\ \frac{1}{-s^2+s+1} \quad (iv)\ \frac{1}{-s^2-s+1}$$

   Enda stabila systemet är (i).

3. (a)

$$G_c = \frac{FG}{1+FG} = \frac{K_P + K_D s}{s^2 + (1+K_D)s + 1 + K_P}$$

   Jämför med det önskade nämnarpolynomet: $(s+3/2)^2 = s^2+3s+9/4$. Detta ger att $K_P = 5/4$ och $K_D = 2$.

   (b) Nämnarpolynomet till det slutna systemet blir $s^2 + (1 + K_D)s + K_P + 1/10$. Nollställena hamnar i $s = -(1 + K_D)/2 \pm \sqrt{((1 + K_D)/2)^2 - (1/10 + K_P)}$, dvs systemet är stabilt då kraven $K_D > -1$ och $K_P > -0.1$ är uppfyllda. Eftersom parametrarna i b-uppgiften uppfyller dessa krav kommer systemet fortfarande att vara stabilt.

   (c) Tag fram tillståndsbeskrivning. Styrbar kanonisk form ger

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} u\\ y &= \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} x\end{aligned}$$

   Tillståndsåterkoppling $u = -Lx + r$ ger slutna systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix}-(l_1+1) & -(l_2+1)\\ 1 & 0\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} r\\ y &= \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} x\end{aligned}$$

   Poler i $-3/2$ ger $(s+3/2)^2 = s^2+3s+9/4$ och L kan lösas ut ur $l_1 + 1 = 3$ och $l_2 + 1 = 9/4$, dvs $L = \begin{pmatrix}2 & 5/4\end{pmatrix}$. (Samma regulator som PD-regulatorn i a) eftersom $x_1 = \dot{y}$, $x_2 = y$.)

4. (a) Beskrivningen ger att

$$G_o(s) = \frac{K}{4(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)s}$$

   vilket ger felkoefficienterna

$$e_0 = \frac{1}{1 + \lim_{s\to 0} G_o(s)} = 0, \qquad e_1 = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG_o(s)} = \frac{4}{K}$$

   givet att G_c är asymptotiskt stabilt. Vidare är G_c stabil så länge K är mindre än amplitudmarginalen som ur bodediagrammet utläses som $A_m = 4000$. Alltså $K < 4000$ för att felkoefficienterna ska vara väldefinierade.

(b) Uppgiftsformuleringen lämpar sig väl för leadlag-reglering. Ur bodediagrammet fås $|G(i\omega_{c,d})| = 5 \cdot 10^{-4}$ och $\arg G(i\omega_{c,d}) = -175°$ vid den önskade skärfrekvensen $\omega_{c,d} = 100\,\text{rad/s}$. För att uppnå önskade $\phi_m \geq 50°$ krävs då en fasavancering med $50° - (180° - 175°) + 6° = 51°$, där $+6°$ läggs till då lag-länk verkar behövas. Figur 5.13 i Glad&Ljung ger då $\beta = 0.125$. Följaktligen väljs $\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} = 0.028$ och $K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|} = 707$ för att uppnå önskad skärfrekvens.

Kontrolleras nu felkoefficienterna fås $e_0 = 0$ (en ren integration finns i systemet) och

$$e_1 = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sK\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1}G(s)} = \frac{4}{K} \approx 5.7 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}.$$

En lag-länk behövs alltså. Med en inlagd lag-länk erhålls

$$e_1 = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sK\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1}\frac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma}G(s)} = \frac{4\gamma}{K} \approx \gamma \cdot 5.7 \cdot 10^{-3}.$$

Detta värde blir mindre än 0.001 för $\gamma < 0.175$. Tillsammans med tumregeln $\tau_I = 10/\omega_{c,d} = 0.1\,\text{rad/s}$ får vi nu den färdiga leadlag-regulatorn:

$$F(s) = 707\frac{0.028s+1}{0.0035s+1} \cdot \frac{0.1s+1}{0.1s+0.17}.$$

5. (a) Överföringsfunktionen är

$$V\frac{s+V/2}{(s-1)(s+1)}$$

varför polerna är ± 1 såvida inte en förkortning sker, vilket är fallet då $V = 2$. Då finns det endast en pol 1. Om $V = 0$, så finns det inga poler alls. Observera att negativa V inte behöver undersökas eftersom vi antar icke-negativ hastighet.

(b) Det slutna systemets poler ges av

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda + Vl_1 & Vl_2 - 1 \\ \frac{V^2}{2}l_1 - 1 & \lambda + \frac{V^2}{2}l_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \left(\frac{V^2}{2}l_2 + Vl_1\right)\lambda + \frac{V^2}{2}l_1 + Vl_2 - 1 = 0$$

Vill ha polerna i -2, -2 vilket innebär $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Identifiering ger att

$$l_1 = \frac{2(8-5V)}{(4-V^2)V}$$
$$l_2 = \frac{4(5-2V)}{(4-V^2)V}$$

Tillståndsåterkopplingen blir $u = -\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} x$.

(c) l_1 och l_2 växer obegränsat då nämnaren går mot noll, dvs $V^* = 0$ eller $4 - (V^*)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V^* = 2$

(d) Det går inte att placera egenvärdena godtyckligt för systemet är inte styrbart. Styrbarhetsmatrisen är

$$S = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & \frac{V^2}{2} \\ \frac{V^2}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

och $\det S = V^2(1 - \frac{V^2}{4})$. Vi ser att $\det S = 0$ då $V = 0$ eller $V = 2$ vilket innebär att systemet inte är styrbart.

(e) Polpolynomet ges av $\lambda^2 + 2(l_1 + l_2)\lambda + 2(l_1 + l_2) - 1 = 0$ då $V = 2$. Låt det önskade polpolynomet vara $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Identifiering ger

$$\begin{cases} 2(l_1 + l_2) = a \\ 2(l_1 + l_2) = 1 + b \end{cases}$$

Det finns en lösning om båda högerleden är lika; detta uppfylls t.ex om $a = 2$ och $b = 1$. Det önskade polpolynomet ges då av $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ som har poler i $\lambda = -1$.

Den stabileserande återkopplingen har poler i -1 och ges av $l_1 + l_2 = 1$.