Tentamen i TSKS10 Signaler, information och kommunikation

Provkod:	TEN1
Tid:	2017-10-26 **Kl:** 8:00–13:00
Lokal:	G33, G35, G37, TERE
Lärare:	Mikael Olofsson, tel: 281343
Besöker salen:	9 och 11:30
Administratör:	Carina Lindström, 013-284423, carina.e.lindstrom@liu.se
Institution:	ISY
Hjälpmedel:	På del 1 tillåts inga hjälpmedel. På del 2 får följande användas: Erik G. Larsson, *Signals, Information and Communications.* Errata till 2014 års upplaga av ovanstående. Mikael Olofsson, *Tables and Formulas for Signal Theory.* Sune Söderkvist, *Formler & Tabeller.* Råde/Westergren, *Mathematics Handbook for Science and Engineers* (Beta). Physics Handbook Formelsamling Fourieranalys Lasse Alfredsson, *Formelsamling för Signaler & System.*
Antal uppgifter:	8
Bedömning:	Denna tentamen består av två delar. Del 1 består av frågor och lämnas in innan del 2 påbörjas. Del 2 består av problem som ska lösas. Del 1 ger maximalt 15 poäng och del 2 ger maximalt 35 poäng. Total maxpoäng är alltså 50 poäng. Betygsgränser: • Betyg tre: 22 poäng, • Betyg fyra: 30 poäng, • Betyg fem: 38 poäng. Slarviga och svårlästa lösningar bedöms hårt, orimliga svar likaså.
Lösningar:	Publiceras senast tre dagar efter tentamen på adress http://www.commsys.isy.liu.se/TSKS10
Resultat:	Tentamensresultat, inklusive skrivningspoäng, meddelas via det automatiska Ladok-utskicket du erhåller via e-post. Detta skickas ut till alla tenterande som är registrerade på kursen, när tentaresultat förts in i Ladok, vanligen runt 12 arbetsdagar efter tentamen.
Tentavisning:	På ISYs expedition i hus B, korridor D, mellan ingångarna 27 och 29, alldeles invid Café Java, c:a två veckor efter tentan.

Del 1: Teorifrågor (15 poäng)

Lös först denna del och lämna in den till tentavakten innan du går vidare till del 2. Du får inte ha några hjälpmedel till denna del.

1 Om en signal $x(t)$ trunkeras till ett ändligt intervall $[-T/2, T/2]$, vad händer då med dess spektrum? Förklara med hjälp av figurer. (3 p)

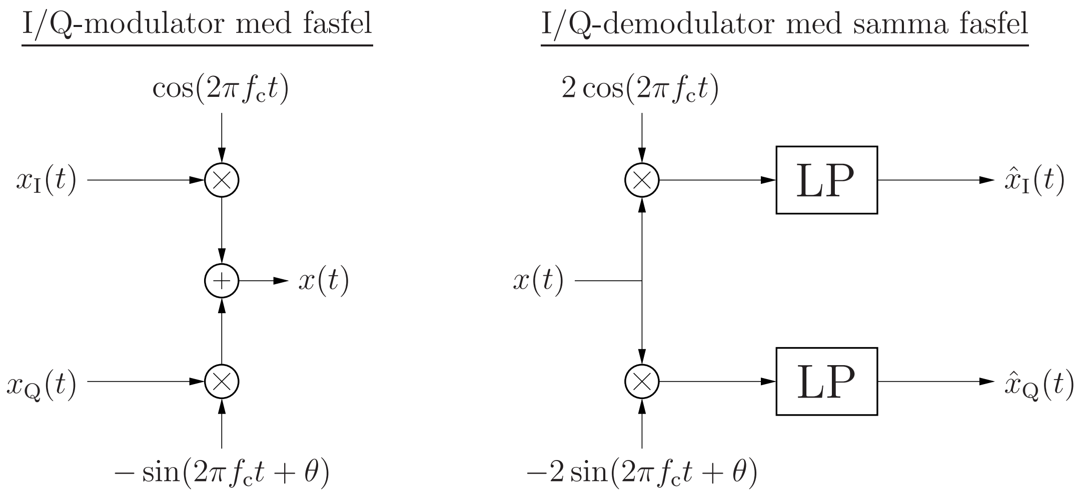
2 Vad är dimensionalitet? Vilken dimensionalitet har en signal som bor i $[-T/2, T/2] \times [-B, B]$ och varför? (5 p)

3 Rita den fysikaliska modell av en kabel som vi använder i kursen. Beskriv alla väsentliga komponenter. (7 p)

Del 2: Problemlösning (35 poäng)

När du har lämnat in del 1 till tentavakten kan du börja på denna del. Här får du använda alla hjälpmedel som listas på försättsbladet.

4 Betrakta nedanstående I/Q-modulator och -demodulator, där det är ett fasfel θ på sinustermen både på sändarsidan och på mottagarsidan. (9 p)



Som en konsekvens gäller i allmänhet

$$\hat{x}_I(t) \neq x_I(t) \qquad \hat{x}_Q(t) \neq x_Q(t).$$

a. Ge uttryck som relaterar $\hat{x}_I(t)$ och $\hat{x}_Q(t)$ till $x_I(t)$ och $x_Q(t)$. (3p)

b. Anta att θ är känd hos mottagaren. Härled och beskriv en mekanism (ge en explicit formel), med vilken $x_I(t)$ och $x_Q(t)$ kan återskapas ur $\hat{x}_I(t)$ och $\hat{x}_Q(t)$. (4p)

c. Beskriv ett sätt att rimlighetskontrollera ditt svar i b. (1p)

d. För vilka värden på θ fungerar din lösning i *b*? (1p)

5 Betrakta figur 5.10 på sidan 97 i SIC (2017), där PAM-blocket använder pulsformen (5 p)

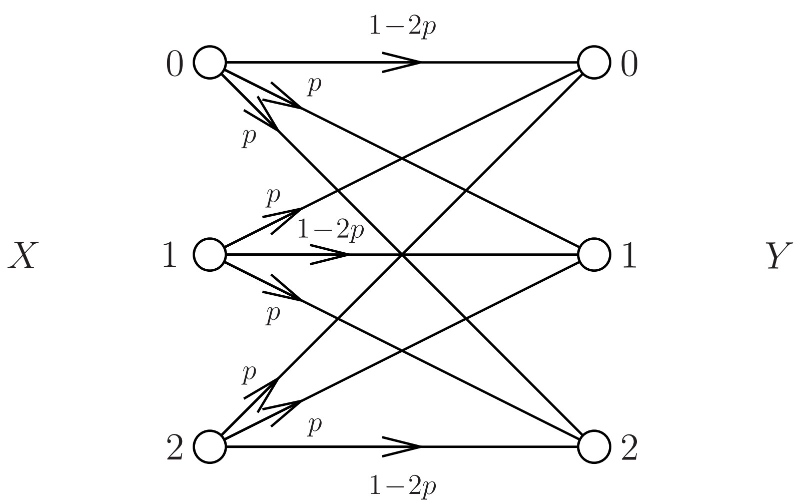
$$p(t) = \cos(8\pi t)\,\mathrm{sinc}(8t).$$

Kanalen och mottagarfiltret har impulssvar

$$h(t) = \gamma(t) = 10\,\mathrm{sinc}(30t).$$

Bestäm alla värden på sampelperioden T_s, för vilka nyquistkriteriet är uppfyllt för denna kommunikationslänk. Om nyquistkriteriet inte är uppfyllt för något T_s, argumentera för varför det är så.

6 Figuren nedan visar övergångssannolikheterna mellan insignal och utsignal för en ternär kanal, mellan dess insignal X och dess utsignal Y. Denna kanal har tre möjliga insymboler, 0, 1 och 2, och tre möjliga utsymboler, 0, 1 och 2. Successiva användningar av kanalen är oberoende. (9 p)



a. Bestäm kanalens kapacitet uttryckt i bitar per kanalanvändning. (7p)

b. Bestäm de värden på p som gör det möjligt att kommunicera exakt felfritt över kanalen. Vad är kapaciteten då? (2p)

7 En minnesfri källa levererar symbolerna A, B och C med sannolikheterna $\Pr\{A\} = 0.6$, $\Pr\{B\} = 0.3$ och $\Pr\{C\} = 0.1$. (7 p)

a. Konstruera en huffmankod som kodar en symbol i taget, och bestäm förväntade kodordslängden per källsymbol. (2p)

b. Utvidga källan genom att koda två symboler i taget. De nya källsymbolerna är därmed AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB och CC. Konstruera en huffmankod för denna utvidgade källa, och bestäm den förväntade kodordslängden per källsymbol ur den ursprungliga källan. (5p)

8 Betrakta markbunden radiokommunikation över ett avstånd på 200 m. Vi vill öka detta avstånd till 800 m med oförändrad mottagen effekt. Hur mycket måste då sändareffekten ökas, uttryckt i dB? Vägförlustexponenten (path loss exponent) får antas vara $\gamma = 3$. (5 p)

TSKS10 - liten ordlista

Engelska	Svenska	Sammanhang i kursen (om inte uppenbart)
aliasing	vikning	sampling/rekonstruktion
alphabet	alfabet	
ambiguity function	mångtydighetsfunktion	fördröjningsestimering
band-limited	bandbegränsad	signalrepresentation
bandpass	bandpass-	signalrepresentation
bandwidth	bandbredd	
bandwidth-limited regime	bandbreddsbegränsat område	kapacitet/LTI kanaler
baseband	basband	signalrepresentation
biased coin	skevt mynt	
binary channel	binär kanal	
binary digit	binär siffra	
binary symmetric channel	binär-symmetrisk kanal	
bit	bit	
capacity	kapacitet	kodning/felrättning
carrier frequency	bärfrekvens	modulering
channel coding	kanalkodning	
channel state information	kanalkännedom	digital kommunikation
channel use	kanalanvändning	
code	kod	
codebook	kodbok	
codeword	kodord	kodning/felrättning
coherence bandwidth	koherensbandbredd	LTI kanaler
coherence interval	koherensintervall	LTI kanaler
coherence time	koherenstid	kanaler
conditional probability	betingad sannolikhet	
conditioned on	betingat på	i sannolikhetslära
constellation	konstellation	
converse theorem	omvändning	
convolution	faltning	LTI system
convolutional code	faltningskod	kodning/felrättning
correlation	korrelation	
decoder	avkodare	kodning
degrees of freedom	frihetsgrader	signalrepresentation
delay spread		LTI kanaler
demodulation	demodulering	
dimensionality	dimensionalitet	signalrepresentation
discrete memoryless channel	diskret minneslös kanal	
diversity	diversitet	
downconversion	nedblandning	modulering
downsampling	nedsampling (decimering)	
encoder	kodare	kodning
entropy	entropi	
envelope	envelopp	signalrepresentation
erasure channel	suddkanal	kodning
equalization	utjämning	digital kommunikation
error floor	felgolv	
error probability	felsannolikhet	
error protection	felskydd	
expected value	väntevärde	
fading	fädning	trådlösa kanaler
fair coin	plant mynt	
frequency flat	frekvens-flat	LTI kanaler
frequency response	frekvenssvar	LTI system
frequency selective	frekvens-selektiv	LTI kanaler
Gaussian noise	gaussiskt brus	
ghost peak	spöktopp	fördröjningsestimering
Hamming distance	hammingavstånd	kodning/felrättning
impedance	impedans	kablar
impulse response	impulssvar	LTI system

inphase/quadrature		
large-scale fading	storskalig fädning	trådlösa kanaler
load	last	kablar
lossless compression	förlustfri kompression	
lossy compression	icke-förlustfri kompression	
low-density parity check		
lowpass	lågpass-	signalrepresentation
matched load	anpassad last	kablar
memoryless	minneslös	kanal
minimum distance	minimiavstånd	kodning/felrättning
mismatched load	missanpassad last	kablar
modulation	modulering	
modulation	modulation	
multipath propagation	flervägsutbredning	trådlösa kanaler
mutual information	ömsesidig information	kodning/felrättning
narrowband	smalbandig	signalrepresentation
noise	brus	
parity check	paritetskontroll	kodning/felrättning
path loss	sträckdämpning	trådlösa kanaler
phase	fas	signalrepresentation
phase modulation	fasmodulering	
phase-shift keying		
pilot waveform	pilot(-vågform)	digital kommunikation
power-limited regime	effektbegränsat område	kapacitet/LTI kanaler
probability	sannolikhet	
probability density function	täthetsfunktion	
probability mass function		
propagation loss	utbredningsförlust	trådlösa kanaler
pulse-amplitude modulation	pulsamplitudmodulering	
pulse code modulation	pulskodmodulering	datakompression
quadrature amplitude modulation	kvadraturamplitudmodulering	
quantization	kvantisering	
random variable	slumpvariabel, stokastisk variabel	
rate	takt	kodning/felrättning
redundancy	redundans	kodning/felrättning
repetition code	repetitionskod	kodning/felrättning
reverse link		digital kommunikation
runlength coding	skurlängdskodning	datakompression
sampling theorem	samplingsteorem	
shadow fading	skuggfädning	trådlösa kanaler
signal-to-noise ratio	signal-till-brus-förhållande	
small-scale fading	småskalig fädning	trådlösa kanaler
source	källa	
source coding	källkodning	
spectral efficiency	spektraleffektivitet	digital kommunikation
standard deviation	standardavvikelse	
string	sträng	
symbol	symbol	
symbol rate	symboltakt	
synchronization	synkronisering	digital kommunikation
thermal noise	termiskt brus	
time constant	tidskonstant	LTI system
time-delay	(tids)fördröjning	
time-delay estimation	fördröjningsestimering	
time-limited	tidsbegränsad	signalrepresentation
transmission line		
upsampling	uppsampling	
variance	varians	
waveform	vågform	
white noise	vitt brus	
wired	trådbunden	
wireless	trådlös	

Some Handy Formulas

Trigonometric Identities

$$
\begin{aligned}
\cos^2(x)+\sin^2(x) =& 1\\
\sin(x+y) =& \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)\\
\cos(x+y) =& \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)\\
\sin(2x) =& 2\sin(x)\cos(x)\\
\cos(2x) =& \cos^2(x)-\sin^2(x) = 1-2\sin^2(x) = 2\cos^2(x)-1\\
\sin(x)\cos(y) =& \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))\\
\sin(x)\sin(y) =& \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))\\
\cos(x)\cos(y) =& \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))
\end{aligned}
$$

Fourier Transform

- Suppose $x(t)$ and $X(f)$ constitute a Fourier transform pair,

$$
\begin{aligned}
X(f) =& \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt, \quad \text{and}\\
x(t) =& \mathscr{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,df.
\end{aligned}
$$

  Then

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}\{x(-t)\} &= X(-f)\\
\mathscr{F}\{x(at)\} &= \frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right), \qquad a>0\\
\mathscr{F}\{x(t-T)\} &= e^{-j2\pi fT}X(f)\\
\mathscr{F}\{x(t)\cos(2\pi f_c t)\} &= \frac{1}{2}(X(f-f_c)+X(f+f_c))\\
\mathscr{F}\{x(t)\sin(2\pi f_c t)\} &= \frac{1}{2j}(X(f-f_c)-X(f+f_c))
\end{aligned}
$$

- If $X_1(f) = \mathscr{F}\{x_1(t)\}$ and $X_2(f) = \mathscr{F}\{x_2(t)\}$ are two Fourier transform pairs, then

$$\mathscr{F}\{(x_1 * x_2)(t)\} = X_1(f)X_2(f)$$
$$\mathscr{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = (X_1 * X_2)(f)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)X_2^*(f)\,df$$

- Some basic transform pairs:

$$x(t) = \cos(2\pi f_c t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c))$$
$$x(t) = \sin(2\pi f_c t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2j}(\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c))$$
$$x(t) = \operatorname{sinc}(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \begin{cases} 1, & |f| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \operatorname{sinc}(f)$$
$$x(t) = e^{-|t|} \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 f^2}$$
$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \ge 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$$
$$x(t) = \frac{1}{1 + t^2} \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \pi e^{-2\pi|f|}$$

Some Useful Numerical Approximations

$2^{1.44} \approx e \approx 2.72$	$2^{1.59} \approx 3$	$2^{2.59} \approx 6$	$2^{6.64} \approx 100$
$e^{2.3} \approx 10$	$\pi^2 \approx 10$	$\sqrt{3} \approx 1.73$	$3^{1/3} \approx 1.44$

TSKS10 Signaler, information och kommunikation

Lösningar till tentan 2017-10-26

Mikael Olofsson, mikael.olofsson@liu.se

Del 1: Teorifrågor (15 poäng)

1
Se avsnitt 2.1.2 på sidorna 23-25 i SIC (2017).

2
Se avsnitt 2.1.1 på sidorna 22-23 och avsnitt 2.4 på sidorna 35-36 i SIC (2017).

3
Se avsnitt 9.1, delen på sidorna 205-207 i SIC (2017).

Del 2: Problemlösning (35 poäng)

4
Från figuren har vi

$$x(t) = x_{\mathrm{I}}(t)\cos(2\pi f_{\mathrm{c}}t) - x_{\mathrm{Q}}(t)\sin(2\pi f_{\mathrm{c}}t+\theta).$$

a. Låt LP vara ett idealt lågpassfilter som matchar bandbredden hos basbandskomponenterna. För demodulatorn gäller för I-komponenten

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_{\mathrm{I}}(t) = \\
&= 2\cdot \mathrm{LP}\big\{x(t)\cos(2\pi f_{\mathrm{c}}t)\big\} \\
&= 2\cdot \mathrm{LP}\Big\{\Big(x_{\mathrm{I}}(t)\cos(2\pi f_{\mathrm{c}}t) - x_{\mathrm{Q}}(t)\sin(2\pi f_{\mathrm{c}}t+\theta)\Big)\cos(2\pi f_{\mathrm{c}}t)\Big\} \\
&= 2\cdot \mathrm{LP}\big\{x_{\mathrm{I}}(t)\cos^2(2\pi f_{\mathrm{c}}t) - x_{\mathrm{Q}}(t)\sin(2\pi f_{\mathrm{c}}t+\theta)\cos(2\pi f_{\mathrm{c}}t)\big\} \\
&= \mathrm{LP}\Big\{x_{\mathrm{I}}(t)\Big(1+\cos(4\pi f_{\mathrm{c}}t)\Big) - x_{\mathrm{Q}}(t)\Big(\sin(\theta)+\sin(4\pi f_{\mathrm{c}}t+\theta)\Big)\Big\} \\
&= x_{\mathrm{I}}(t) - x_{\mathrm{Q}}(t)\sin(\theta).
\end{aligned}$$

För Q-komponenten gäller

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_{\mathrm{Q}}(t) = \\
&= -2\cdot \mathrm{LP}\big\{x(t)\sin(2\pi f_{\mathrm{c}}t+\theta)\big\} \\
&= -2\cdot \mathrm{LP}\Big\{\Big(x_{\mathrm{I}}(t)\cos(2\pi f_{\mathrm{c}}t) - x_{\mathrm{Q}}(t)\sin(2\pi f_{\mathrm{c}}t+\theta)\Big)\sin(2\pi f_{\mathrm{c}}t+\theta)\Big\} \\
&= 2\cdot \mathrm{LP}\big\{-x_{\mathrm{I}}(t)\cos(2\pi f_{\mathrm{c}}t)\sin(2\pi f_{\mathrm{c}}t+\theta) - x_{\mathrm{Q}}(t)\sin^2(2\pi f_{\mathrm{c}}t+\theta)\big\} \\
&= \mathrm{LP}\Big\{-x_{\mathrm{I}}(t)\Big(\sin(\theta)+\sin(4\pi f_{\mathrm{c}}t+\theta)\Big) - x_{\mathrm{Q}}(t)\Big(1-\cos(4\pi f_{\mathrm{c}}t)\Big)\Big\} \\
&= x_{\mathrm{Q}}(t) - x_{\mathrm{I}}(t)\sin(\theta).
\end{aligned}$$

b. Från deluppgift a har vi

$$\begin{pmatrix}\hat{x}_{\mathrm{I}}(t)\\ \hat{x}_{\mathrm{Q}}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -\sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{\mathrm{I}}(t)\\ x_{\mathrm{Q}}(t)\end{pmatrix}.$$

Följaktligen gäller

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x_{\mathrm{I}}(t)\\ x_{\mathrm{Q}}(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & -\sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\hat{x}_{\mathrm{I}}(t)\\ \hat{x}_{\mathrm{Q}}(t)\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\cos^2(\theta)}\begin{pmatrix}1 & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}_{\mathrm{I}}(t)\\ \hat{x}_{\mathrm{Q}}(t)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

c. Om vi har $\theta = 0$, så ska

$$\hat{x}_{\mathrm{I}}(t) = x_{\mathrm{I}}(t), \qquad \hat{x}_{\mathrm{Q}}(t) = x_{\mathrm{Q}}(t)$$

gälla, vilket det också gör om vi sätter in $\theta = 0$ i sambanden från deluppgift b.

d. Förutsättningen är att beräkningarna enligt deluppgift b kan utföras, vilket de kan om vi har $\cos(\theta) \neq 0$, eftersom vi dividerar med $\cos(\theta)$. Följaktligen fungerar lösningen i deluppgift b om vi har $\theta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, för alla heltal m.

Svar:

a. $\begin{pmatrix}\hat{x}_{\mathrm{I}}(t)\\ \hat{x}_{\mathrm{Q}}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -\sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{\mathrm{I}}(t)\\ x_{\mathrm{Q}}(t)\end{pmatrix}$.

b. $\begin{pmatrix}x_{\mathrm{I}}(t)\\ x_{\mathrm{Q}}(t)\end{pmatrix} = \frac{1}{\cos^2(\theta)}\begin{pmatrix}1 & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}_{\mathrm{I}}(t)\\ \hat{x}_{\mathrm{Q}}(t)\end{pmatrix}$.

c. Kontrollera med $\theta = 0$.

d. $\theta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$ för alla heltal m.

5
Givet är, med notation från figur 5.10 på sidan 97 i SIC (2017),

$$\begin{aligned}
p(t) &= \cos(8\pi t)\,\mathrm{sinc}(8t), \\
h(t) &= \gamma(t) = 10\,\mathrm{sinc}(30t).
\end{aligned}$$

Låt $P(f)$, $H(f)$ och $\Gamma(f)$ vara motsvarande frekvenssvar. Vi noterar att vi har för $t \neq 0$

$$\begin{aligned} p(t) &= \cos(8\pi t)\,\mathrm{sinc}(8t) = \frac{\cos(8\pi t)\sin(8\pi t)}{8\pi t} \\ &= \frac{\sin(16\pi t)}{16\pi t}, \end{aligned}$$

och för $t = 0$ har vi

$$p(0) = \cos(8\pi 0)\,\mathrm{sinc}(0) = 1.$$

Sammantaget har vi alltså

$$p(t) = \mathrm{sinc}(16t).$$

Med hjälp av t.ex. fouriertransformtabellen på sidan 19 i Tables and Formulas for Signal Theory, så ser vi att $P(f)$ har bandbredd 8 Hz, och att vi har

$$H(f) = \Gamma(f) = \begin{cases} 1/3, & |f| < 15\,\mathrm{Hz}, \\ 0, & \text{för övrigt}, \end{cases}.$$

Med samma notation som i SIC, så inför vi den resulterande pulsformens fouriertransform

$$R(f) = H(f)\Gamma(f)P(f) = \frac{1}{9}P(f).$$

Följaktligen har vi

$$r(t) = \frac{1}{9}p(t) = \frac{1}{9}\,\mathrm{sinc}(16t).$$

Vi är nu intresserade av den samplade versionen av $r(t)$, dvs.

$$\tilde{r}[n] = r(nT_{\mathrm{s}}),$$

där T_{s} är sampelperioden som vi vill bestämma. Enligt ekvation 5.38 på sidan 100 i SIC (2017), så ska då

$$\tilde{r}[n] = r(nT_{\mathrm{s}}) = A\delta[n]$$

gälla, där A är någon nollskild reell konstant, och där $\delta[n]$ är den tidsdiskreta enhetsimpulsen. Vi måste alltså se till att samplingen för alla nollskilda heltal n hamnar i nollgenomgångar för $r(t)$, och de finns i $\pm m/16$, för alla positiva heltal m.

Nyquistkriteriet är alltså uppfyllt för sampelperioden $T_{\mathrm{s}} = K/16$, för alla positiva heltal K.

Svar: $T_{\mathrm{s}} = K/16$, där K är ett positivt heltal.

6

Vi använder beteckningarna

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \Pr\{X = x\}, \\ p_Y(y) &= \Pr\{Y = y\}, \\ p_{Y|X}(y|x) &= \Pr\{Y = y | X = x\}. \end{aligned}$$

För den givna kanalen har vi

$$p_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1 - 2p, & x = y, \\ p, & x \neq y. \end{cases}$$

för x och y i $\{0, 1, 2\}$.

a. Vi vill bestämma kanalens kapacitet,

$$C = \max I(X; Y),$$

där $I(X;Y)$ är den ömsesidiga informationen av X och Y, och där maximeringen är över alla fördelningar av X. Av kanalens symmetri drar vi slutsatsen att $I(X;Y)$ maximeras av en likformig fördelning av X, alltså

$$p_X(0) = p_X(1) = p_X(2) = 1/3.$$

Vad vi har kvar att bestämma är $I(X;Y)$ för det fallet. vi har

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

enligt ekvation 7.41 på sidan 157 i SIC (2017). Vi vill alltså bestämma entropierna $H(Y)$ och $H(Y|X)$. För att bestämma $H(Y)$ behöver vi $p_Y(y)$, som ges av

$$p_Y(y) = \sum_x p_X(x) p_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{3}$$

för y i $\{0, 1, 2\}$. Då får vi

$$\begin{aligned} H(Y) &= -\sum_{y=0}^{2} p_Y(y)\log_2\big(p_Y(y)\big) \\ &= 3\left(-\frac{1}{3}\log_2(1/3)\right) = \log_2(3). \end{aligned}$$

Den betingade entopin ges av ekvation 7.49 på sidan 163 i SIC (2017). Den kan tolkas som ekvationen

$$H(Y|X) = \sum_x p_X(x) H(Y|X = x),$$

där vi har

$$\begin{aligned} H(Y|X = x) &= -\sum_y p_{Y|X}(y|x) \\ &= -p_{Y|X}(0|x)\log_2(p_{Y|X}(0|x)) \\ &\quad - p_{Y|X}(1|x)\log_2(p_{Y|X}(1|x)) \\ &\quad - p_{Y|X}(2|x)\log_2(p_{Y|X}(2|x)) \\ &= -(1 - 2p)\log_2(1 - 2p) - 2p\log_2(p), \end{aligned}$$

för x i $\{0, 1, 2\}$. Detta resulterar i

$$\begin{aligned} &H(Y|X) = \\ &= -(1-2p)\log_2(1-2p) - 2p\log_2(p). \end{aligned}$$

Alltså ges den ömsesidiga informationen av

$$\begin{aligned} &I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = \\ &= \log_2(3) + (1-2p)\log_2(1-2p) + 2p\log_2(p). \end{aligned}$$

b. För att kunna kommunicera felfritt måste vi ha en situation då sända symboler resulterar i mottagna symboler enligt ett ett-till-ett-förhållande eller enligt ett ett-till-flera-förhållande. Då kan vi från mottagna symboler med säkerhet säga vilka de sända symbolerna var. Det uppfyller vi endast om vi har $p = 0$. Då får vi en felfri ternär kanal. Kapaciteten blir då förstås $C = \log_2(3)$ bitar per kanalanvändning.

Not: Om du inte köper resonemanget att den ömsesidiga informationen maximeras av den likformiga fördelningen baserat på observationen att kanalen är symmetrisk, så kan du låta $p_X(0) = p_0$ och $p_X(1) = p_1$, vilket inte påverkar $H(Y|X)$. Vad det gör, däremot, är att det påverkar $H(Y)$. Uttryck $p_Y(y)$ i p_0 och p_1 och bestäm $H(Y)$ uttryckt i p_0 och p_1. Slutligen, studera derivatan av den ömsesidiga informationen med avseende på p_0 och p_1, sätt lika med noll, och bestäm p_0 och p_1 därifrån. Du finner då att $p_0 = p_1 = 1/3$ maximerar $H(Y)$.

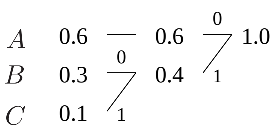
Svar:

a. $C = \log_2(3) + (1-2p)\log_2(1-2p) + 2p\log_2(p)$.
b. $p = 0$, med $C = \log_2(3)$.

7

Vi har blivit givna en minnesfri källa som levererar symbolerna A, B och C med sannolikheterna $\Pr\{A\} = 0.6$, $\Pr\{B\} = 0.3$ och $\Pr\{C\} = 0.1$.

a. Vi kodar en symbol i taget. Huffmanalgoritmen ger:



Vi får därmed följande huffmankod.

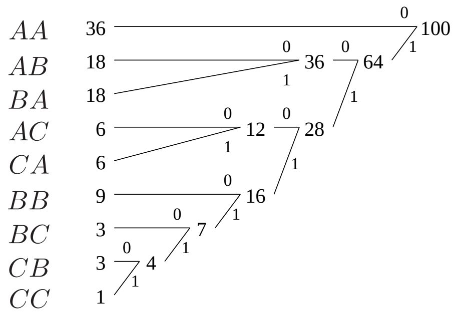
Symbol (a_i)	Kodord	l_i	$\Pr\{a_i\}$	$\Pr\{a_i\}l_i$
A	0	1	0.6	0.6
B	10	2	0.3	0.6
C	11	2	0.1	0.2
				$\sum = 1.4$

Förväntad kodordslängd är alltså 1.4 bit/symbol.

b. Baserat på antagandet att källan är minnesfri får vi sannolikheterna:

$$\begin{aligned} \Pr\{AA\} &= \Pr\{A\}\cdot\Pr\{A\} = 0.36 \\ \Pr\{AB\} &= \Pr\{A\}\cdot\Pr\{B\} = 0.18 \\ \Pr\{BA\} &= \Pr\{B\}\cdot\Pr\{A\} = 0.18 \\ \Pr\{BB\} &= \Pr\{B\}\cdot\Pr\{B\} = 0.09 \\ \Pr\{AC\} &= \Pr\{A\}\cdot\Pr\{C\} = 0.06 \\ \Pr\{CA\} &= \Pr\{C\}\cdot\Pr\{A\} = 0.06 \\ \Pr\{BC\} &= \Pr\{B\}\cdot\Pr\{C\} = 0.03 \\ \Pr\{CB\} &= \Pr\{C\}\cdot\Pr\{B\} = 0.03 \\ \Pr\{CC\} &= \Pr\{C\}\cdot\Pr\{C\} = 0.01 \end{aligned}$$

Huffmanalgoritmen:



Vi får därmed följande huffmankod.

Symbol (a_i)	Kodord	l_i	$\Pr\{a_i\}$	$\Pr\{a_i\}l_i$
AA	0	1	0.36	0.36
AB	100	3	0.18	0.54
BA	101	3	0.18	0.54
BB	1100	4	0.09	0.36
AC	1101	4	0.06	0.24
CA	1110	4	0.06	0.24
BC	11110	5	0.03	0.15
CB	111110	6	0.03	0.18
CC	111111	6	0.01	0.06
				$\sum = 2.67$

Förväntad kodordslängd är alltså 2.67 bit/symbolpar, vilket motsvarar 1.335 bit/symbol.

Svar: a. 1.4 bit/symbol. **b.** 1.335 bit/symbol.

8

Detta handlar om sträckdämpning. Vi har markbunden radiokommunikation över ett avstånd som initialt är 200 m, och får då någon mottagen effekt P. Vi frågar oss hur mycket vi måste öka sändareffekten för att mottagen effekt på avstånd av 800 m ska vara P, om vägförlustexponenten är $\gamma = 3$.

Enligt ekvation 9.28 på sidan 215 i SIC (2017) så ges mottagen effekt av

$$P = K(r/r_0)^{-\gamma},$$

för någon konstant K, där r är gångvägen och där r_0 är en referensgångväg som i vårt fall är $r_0 = 200\,\mathrm{m}$. K är då mottagen effekt på avstånd $r = r_0$, och är proportionell mot sänd effekt. Frågan kan då omformuleras som ”Hur mycket måste K ökas för att P ska vara oförändrad om vi ökar r till $800\,\mathrm{m}$?” Denna ökning blir

$$(r/r_0)^{\gamma} = (800/200)^3 = 4^3 = 2^6.$$

En effektökning med faktorn 2 motsvarar $3\,\mathrm{dB}$. En effektökning med faktorn 2^6 motsvarar $6 \cdot 3\,\mathrm{dB} = 18\,\mathrm{dB}$.

Svar: Sändareffekten måste ökas med $18\,\mathrm{dB}$.