

Tentamen i TSKS10 Signaler, information och kommunikation

Provkod:	TEN1
Tid:	2017-08-15 Kl: 14:00–19:00
Lokal:	TERE, TER3
Lärare:	Mikael Olofsson, tel: 281343
Besöker salen:	15 och 17:30
Administratör:	Carina Lindström, 013-284423, carina.e.lindstrom@liu.se
Institution:	ISY
Hjälpmedel:	På del 1 tillåts inga hjälpmedel. På del 2 får följande användas: Erik G. Larsson, <i>Signals, Information and Communications</i> . Errata till 2014 års upplaga av ovanstående. Mikael Olofsson, <i>Tables and Formulas for Signal Theory</i> . Sune Söderkvist, <i>Formler & Tabeller</i> . Råde/Westergren, <i>Mathematics Handbook for Science and Engineers</i> (Beta). Physics Handbook Formelsamling Fourieranalys Lasse Alfredsson, <i>Formelsamling för Signaler & System</i> .
Antal uppgifter:	8
Bedömning:	Denna tentamen består av två delar. Del 1 består av frågor och lämnas in innan del 2 påbörjas. Del 2 består av problem som ska lösas. Del 1 ger maximalt 15 poäng och del 2 ger maximalt 35 poäng. Total maxpoäng är alltså 50 poäng. Betygsgränser: <ul style="list-style-type: none">• Betyg tre: 22 poäng,• Betyg fyra: 30 poäng,• Betyg fem: 38 poäng. Slarviga och svårlästa lösningar bedöms hårt, orimliga svar likaså.
Lösningar:	Publiceras senast tre dagar efter tentamen på adress http://www.commsys.isy.liu.se/TSKS10
Resultat:	Tentamensresultat, inklusive skrivningspoäng, meddelas via det automatiska Ladok-utskicket du erhåller via e-post. Detta skickas ut till alla tenterande som är registrerade på kursen, när tentaresultat förts in i Ladok, vanligen runt 12 arbetsdagar efter tentamen.
Tentavisning:	På ISYs expedition i hus B, korridor D, mellan ingångarna 27 och 29, alldeles invid Café Java, c:a två veckor efter tentan.

Del 1: Teorifrågor (15 poäng)

Lös först denna del och lämna in den till tentavakten innan du går vidare till del 2. Du får inte ha några hjälpmedel till denna del.

- 1 Beskriv huffman-kodning och -avkodning. (5 p)
- 2 Formulera nyquistkriteriet i tidsdomänen. (5 p)
- 3 Vad är en binärsymmetrisk kanal? Rita figur. Vad har en sådan kanal för kapacitet? (5 p)

Del 2: Problemlösning (35 poäng)

När du har lämnat in del 1 till tentavakten kan du börja på denna del. Här får du använda alla hjälpmedel som listas på försättsbladet.

- 4 Låt $x_I(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ och $x_Q(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ vara basbandsrepresentationen av $x(t)$ med bärvågsfrekvens $f_c > f_1$. Låt vidare $\bar{x}(t)$ och $\phi_x(t)$ vara motsvarande envelopp respektive fasvridning. (6 p)

Bestäm $x(t)$, $\bar{x}(t)$ och $\phi_x(t)$. Förenkla så långt möjligt.

- 5 En signal $y(t) = x(t) + \omega(t)$ består av en deterministisk signal $x(t)$, störd av vitt brus $\omega(t)$. Mottagaren består av ett signalanpassat filter följt av sampling i rätt tidpunkt, och resulterande SNR är då 25 dB. I de fyra fallen nedan, ange motsvarande signalanpassade filter och bestäm resulterande SNR. (7 p)

- a. $3(x(t) + \omega(t))$. (1p)
- b. $3x(t) + \omega(t)$. (2p)
- c. $x(3t) + \omega(t)$. (2p)
- d. $x(t - 3) + \omega(t)$. (2p)

- 6 Bestäm bandbredderna $B_{99\%}$, $B_{3\text{dB}}$, och B_{eff} enligt definitionen i avsnitt 2.1.3, om de existerar, för signalen (6 p)

$$x(t) = 10 \operatorname{sinc}(8t).$$

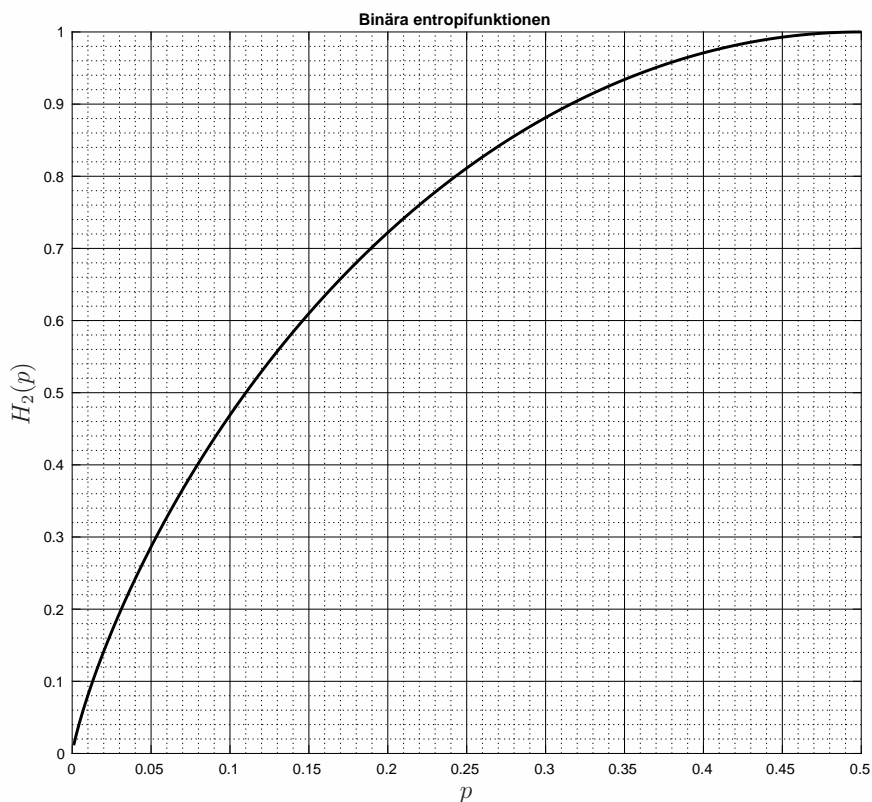
- 7 Signalen $x(t) = \sin(500\pi t)$ samplas med samplingsfrekvens f_s och rekonstrueras sedan idealt. Bestäm utsignalen för (7 p)

- a. $f_s = 600$ Hz. (1p)
- b. $f_s = 300$ Hz. (3p)
- c. $f_s = 200$ Hz. (3p)

- 8 Betrakta en kommunikationslänk som använder LDPC-kodning, den kanske mest moderna och kraftfulla kanalkodning som finns att tillgå. Under gynnsamma omständigheter, så överför systemet kodord bestående av 10,000 binära siffror varje millisekund. Koden som används har takten $R = 1/4$. I denna uppgift kan du modellera överföringen av varje enskild binär siffra via en binärsymmetrisk kanal, även om verkligheten typiskt är lite mer komplicerad än så. (9 p)

- Hur många binära siffror överförs per sekund? (1p)
- Hur många bitar information överförs per sekund? (1p)
- Vilken okodad felsannolikhet, ϵ , kan kanalkoden tolerera, på ett ungefär? (2p)
- Anta att kodningsteori inte var uppfunnet och att vi måste förlita oss på en repetitionskod. Anta vidare att vi kan acceptera en felsannolikhet efter avkodning på 10^{-12} . Med värdet på ϵ från deluppgift c, hur många bitar information per sekund kan vi nu överföra? (5p)

Till din hjälp har du den binära entropifunktionen plottad nedan.



TSKS10 - liten ordlista

Sammanhang i kursen (om inte uppenbart)

<u>Engelska</u>	<u>Svenska</u>	
aliasing	vikning	sampling/rekonstruktion
alphabet	alfabet	
ambiguity function	mångtydighetsfunktion	fördröjningsestimering
band-limited	bandbegränsad	signalrepresentation
bandpass	bandpass-	signalrepresentation
bandwidth	bandbredd	
bandwidth-limited regime	bandbreddsbegränsat område	kapacitet/LTI kanaler
baseband	basband	signalrepresentation
biased coin	skevt mynt	
binary channel	binär kanal	
binary digit	binär siffra	
binary symmetric channel	binär-symmetrisk kanal	
bit	bit	
capacity	kapacitet	kodning/felrättning
carrier frequency	bärfrekvens	modulering
channel coding	kanalkodning	
channel state information	kanalkänedom	digital kommunikation
channel use	kanalanvändning	
code	kod	
codebook	kodbok	
codeword	kodord	kodning/felrättning
coherence bandwidth	koherensbandbredd	LTI kanaler
coherence interval	koherensintervall	LTI kanaler
coherence time	koherenstid	kanaler
conditional probability	betingad sannolikhet	
conditioned on	betingat på	i sannolikhetslära
constellation	konstellation	
converse theorem	omvändning	
convolution	faltning	LTI system
convolutional code	faltningskod	kodning/felrättning
correlation	korrelation	
decoder	avkodare	kodning
degrees of freedom	frihetsgrader	signalrepresentation
delay spread		LTI kanaler
demodulation	demodulering	
dimensionality	dimensionalitet	signalrepresentation
discrete memoryless channel	diskret minneslös kanal	
diversity	diversitet	
downconversion	nedblandning	modulering
downsampling	nedsampling (decimering)	
encoder	kodare	kodning
entropy	entropi	
envelope	envelopp	signalrepresentation
erasure channel	suddkanal	kodning
equalization	utjämning	digital kommunikation
error floor	felgolv	
error probability	felsannolikhet	
error protection	felskydd	
expected value	väntevärde	
fading	fädning	trådlösa kanaler
fair coin	plant mynt	
frequency flat	frekvens-flat	LTI kanaler
frequency response	frekvenssvar	LTI system
frequency selective	frekvens-selektiv	LTI kanaler
Gaussian noise	gaussiskt brus	
ghost peak	spöktopp	fördröjningsestimering
Hamming distance	hammingavstånd	kodning/felrättning
impedance	impedans	kablar
impulse response	impulssvar	LTI system

inphase/quadrature		
large-scale fading	storskalig fädning	trådlösa kanaler
load	last	kablar
lossless compression	förlustfri kompression	
lossy compression	icke-förlustfri kompression	
low-density parity check		
lowpass	lågpass-	signalrepresentation
matched load	anpassad last	kablar
memoryless	minneslös	kanal
minimum distance	minimialavstånd	kodning/felrättning
mismatched load	missanpassad last	kablar
modulation	modulering	
modulation	modulation	
multipath propagation	flervägsutbredning	trådlösa kanaler
mutual information	ömsesidig information	kodning/felrättning
narrowband	smalbandig	signalrepresentation
noise	brus	
parity check	paritetskontroll	kodning/felrättning
path loss	sträckdämpning	trådlösa kanaler
phase	fas	signalrepresentation
phase modulation	fasmodulering	
phase-shift keying		
pilot waveform	pilot(-vågform)	digital kommunikation
power-limited regime	effektbegränsat område	kapacitet/LTI kanaler
probability	sannolikhet	
probability density function	täthetsfunktion	
probability mass function		
propagation loss	utbredningsförlust	trådlösa kanaler
pulse-amplitude modulation	pulsamplitudmodulering	
pulse code modulation	pulskodmodulering	datakompression
quadrature amplitude modulation	kvadraturamplitudmodulering	
quantization	kvantisering	
random variable	slumpvariabel, stokastisk variabel	
rate	takt	kodning/felrättning
redundancy	redundans	kodning/felrättning
repetition code	repetitionskod	kodning/felrättning
reverse link		digital kommunikation
runlength coding	skurlängskodning	datakompression
sampling theorem	samplingsteorem	
shadow fading	skuggfädning	trådlösa kanaler
signal-to-noise ratio	signal-till-brus-förhållande	
small-scale fading	småskalig fädning	trådlösa kanaler
source	källa	
source coding	källkodning	
spectral efficiency	spektraleffektivitet	digital kommunikation
standard deviation	standardavvikelse	
string	sträng	
symbol	symbol	
symbol rate	symboltakt	
synchronization	synkronisering	digital kommunikation
thermal noise	termiskt brus	
time constant	tidskonstant	LTI system
time-delay	(tids)födröjning	
time-delay estimation	födröjningssestimering	
time-limited	tidsbegränsad	signalrepresentation
transmission line		
upsampling	uppsampling	
variance	varians	
waveform	vågform	
white noise	vitt brus	
wired	trådbunden	
wireless	trådlös	

Some Handy Formulas

Trigonometric Identities

$$\begin{aligned}\cos^2(x) + \sin^2(x) &= 1 \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \\ \sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \\ \sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))\end{aligned}$$

Fourier Transform

- Suppose $x(t)$ and $X(f)$ constitute a Fourier transform pair,

$$\begin{aligned}X(f) &= \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt, \quad \text{and} \\ x(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df.\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(-t)\} &= X(-f) \\ \mathcal{F}\{x(at)\} &= \frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right), \quad a > 0 \\ \mathcal{F}\{x(t-T)\} &= e^{-j2\pi fT}X(f) \\ \mathcal{F}\{x(t)\cos(2\pi f_c t)\} &= \frac{1}{2}(X(f-f_c) + X(f+f_c)) \\ \mathcal{F}\{x(t)\sin(2\pi f_c t)\} &= \frac{1}{2j}(X(f-f_c) - X(f+f_c))\end{aligned}$$

- If $X_1(f) = \mathcal{F}\{x_1(t)\}$ and $X_2(f) = \mathcal{F}\{x_2(t)\}$ are two Fourier transform pairs, then

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{(x_1 * x_2)(t)\} &= X_1(f)X_2(f) \\ \mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} &= (X_1 * X_2)(f) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)X_2^*(f) df\end{aligned}$$

- Some basic transform pairs:

$$\begin{aligned}x(t) = \cos(2\pi f_c t) &\Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)) \\ x(t) = \sin(2\pi f_c t) &\Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2j}(\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)) \\ x(t) = \text{sinc}(t) &\Leftrightarrow X(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} &\Leftrightarrow X(f) = \text{sinc}(f) \\ x(t) = e^{-|t|} &\Leftrightarrow X(f) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 f^2} \\ x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} &\Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} \\ x(t) = \frac{1}{1 + t^2} &\Leftrightarrow X(f) = \pi e^{-2\pi|f|}\end{aligned}$$

Some Useful Numerical Approximations

$$\begin{array}{cccc}2^{1.44} \approx e \approx 2.72 & 2^{1.59} \approx 3 & 2^{2.59} \approx 6 & 2^{6.64} \approx 100 \\ e^{2.3} \approx 10 & \pi^2 \approx 10 & \sqrt{3} \approx 1.73 & 3^{1/3} \approx 1.44\end{array}$$

TSKS10 Signaler, information och kommunikation

Lösningar till tentan 2017-08-15

Mikael Olofsson, mikael.olofsson@liu.se

Del 1: Teorifrågor (15 poäng)

1

Här beskrivs binär huffmankodning, eftersom det är den variant vi betraktat i kursen. Huffmankodning är en metod att skapa en trädkod för en källa baserat på källans statistik. Trädet byggs upp genom att de två minst sannolika symbolerna grupperas ihop och bildar en ny symbol. Därmed har vi minskat antalet symboler med en. Samtidigt tilldelas den ena av de ursprungliga två symbolerna en etta och den andra en nolla. Sedan upprepas detta till dess vi fått ett träd och alla ursprungliga symbolerna samlats till en. De ursprungliga symbolerna är löv i detta träd. Kodorden för symbolerna fås genom att läsa ut ettorna och nollorna på vägen från trädets rot till motsvarande löv.

Avkodningen går till så att man börjar i trädets rot, och läser av mottagna bitar och tar höger eller vänster i trädet baserat på dessa bitar, till dess vi nått ett löv, och därmed hittat motsvarande symbol. Därefter börjar vi om i trädets rot på samma sätt för att hitta nästa symbol.

2

Se avsnitt 5.4 på sidorna 97-102 i SIC (2017).

3

Se avsnitt 7.1 på sidorna 141-142 i SIC (2017).

Del 2: Problemlösning (35 poäng)

4

Vi har basbandsrepresentationen

$$\begin{aligned}x_I(t) &= \cos(2\pi f_1 t) \\x_Q(t) &= \sin(2\pi f_1 t)\end{aligned}$$

Passbandssignalen är då enligt ekvation 2.17 på sidan 28 i SIC (2017)

$$\begin{aligned}x(t) &= x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \\&= \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_c t) - \sin(2\pi f_1 t) \sin(2\pi f_c t) \\&= \cos(2\pi(f_c + f_1)t).\end{aligned}\tag{1}$$

Vidare har vi enligt ekvation 2.21 i SIC (2017) enveloppen

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)} \\&= \sqrt{\cos^2(2\pi f_1 t) + \sin^2(2\pi f_1 t)} = 1.\end{aligned}$$

Enligt ekvation ekvation 2.20 i SIC (2017) ska

$$x(t) = \bar{x}(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_x(t))$$

gälla. Om vi nu identifierar i ekvation 1 ovan, så finner vi att vi har fasvridningen

$$\phi_x(t) = 2\pi f_1 t.$$

Svar:

$$x(t) = \cos(2\pi(f_c + f_1)t), \quad \bar{x}(t) = 1, \quad \phi_x(t) = 2\pi f_1 t.$$

5

Detta är i princip uppgift 3-3 i SIC (2017) med en extra deluppgift, men med lite ändrade siffror.

Vi har alltså en signal $x(t) + \omega(t)$ som består av en deterministisk signal $x(t)$, störd av vitt brus $\omega(t)$. Mottagaren består av ett signalanpassat filter följt av sampling i rätt tidpunkt, och resulterande SNR är då 25 dB. Låt genomgående $y(t)$ beteckna den nya nyttsignalen för de fyra fallen nedan, och låt $h(t)$ beteckna motsvarande signalanpassade filter.

- a. För signalen $3(x(t) + \omega(t))$, så förstärks både signalen och bruset med samma faktor (3). Då skalas motsvarande energier med kvadraten av det, alltså 9. I SNR-kvoten så tar dessa nior ut varandra, och resulterande SNR är fortfarande 25 dB. Nyttosignalen är nu $y(t) = 3x(t)$. Motsvarande signalanpassade filter är enligt ekvation 3.19 på sidan 53 i SIC (2017)

$$h(t) = y(-t) = 3x(-t)\tag{2}$$

- b.** För signalen $3x(t) + \omega(t)$, så förstärks signalen med faktorn 3, medan bruset inte skalas alls. Signalens energi skalas förstås även här med kvadraten av det, alltså 9. SNR blir då 9 gånger större. Uttryckt i dB blir det en ökning med $10 \log_{10}(9)$, vilket är knappt 10 dB. Resulterande SNR är då alltså knappt 35 dB, vilket duger som svar.
Vill man vara lite mer exakt, så kan man från formelbladet hitta sambanden

$$\begin{aligned}\log_2(10) &\approx 3.32, \\ \log_2(3) &\approx 1.59.\end{aligned}$$

Förhållandet mellan logaritmer med olika bas ger oss då

$$\begin{aligned}10 \log_{10}(9) &= 10 \frac{\log_2(9)}{\log_2(10)} = 10 \frac{2 \log_2(3)}{\log_2(10)} \\ &\approx 10 \frac{2 \cdot 1.59}{3.32} \approx 9.6 \text{ dB}.\end{aligned}$$

Och då är resulterande SNR ungefär 34.6 dB.

Precis som i deluppgift **a**, så är nyttosignalen $y(t) = 3x(t)$, och motsvarande signalanpassade filter är förstås fortfarande

$$h(t) = 3x(-t) \quad (3)$$

- c.** För signalen $x(3t) + \omega(t)$ så har vi nyttosignalen $y(t) = x(3t)$, och alltså har vi motsvarande signalanpassade filter

$$h(t) = y(-t) = x(-3t) \quad (4)$$

Låt SNR_x och SNR_y vara signal-brusförhållandena för signalerna $x(t) + \omega(t)$ respektive $y(t) + \omega(t)$. Låt vidare σ^2 vara spektraltätheten för bruset $\omega(t)$. Då har vi om filtrena i de två fallen är anpassade, enligt resonemanget kring ekvationerna 3.18 och 3.19 på sidan 53 i SIC (2017),

$$\text{SNR}_x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt}{\sigma^2} \quad (5)$$

och

$$\text{SNR}_y = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt}{\sigma^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(3t) dt}{\sigma^2} \quad (6)$$

Variabelbytet $u = 3t$ ger oss

$$\text{SNR}_y = \frac{1}{3} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(u) du}{\sigma^2} = \frac{1}{3} \text{SNR}_x \quad (7)$$

Då 3 är knappt $\sqrt{10}$, så blir detta uttryckt i dB en minskning med knappt 5 dB, och alltså är resulterande SNR drygt 20 dB, vilket duger som svar.

Med samma metodik som i deluppgift **b**, så har vi

$$\begin{aligned}10 \log_{10}(1/3) &= 10 \frac{\log_2(1/3)}{\log_2(10)} \\ &\approx 10 \frac{-1.59}{3.32} \approx -4.8 \text{ dB}.\end{aligned}$$

Och då är resulterande SNR ungefär 20.2 dB.

- d.** För signalen $x(t-3) + \omega(t)$, så förstärks varken signalen eller bruset. Att signalen tidsförskjuts har ingen inverkan på energin. Följaktligen är SNR oförändrat 25 dB.

Nyttosignalen är nu $y(t) = x(t-3)$. Motsvarande signalanpassade filter är enligt ekvation 3.19 på sidan 53 i SIC (2017)

$$h(t) = y(-t) = 3x(-t-3) \quad (8)$$

Svar:

- 25 dB
- c:a 34.6 dB
- c:a 20.2 dB
- 25 dB

6

Vi var givna signalen

$$x(t) = 10 \text{sinc}(8t).$$

och vi vill bestämma bandbredderna $B_{99\%}$, $B_{3\text{dB}}$ och B_{eff} enligt definitionen i avsnitt 1.1.3, om de existerar.

Enligt sidan 19 i T&F for Signal Theory, så har signalen spektrum

$$X(f) = \frac{5}{4} \text{rect}\left(\frac{f}{8}\right) = \begin{cases} \frac{5}{4}, & |f| < 4 \text{ Hz}, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Vi börjar med $B_{99\%}$, som enligt ekvation 2.10 på sidan 25 i SIC (2017) är det minsta f' , sådant att vi har

$$\frac{\int_{-f'}^{f'} |X(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df} = 0.99.$$

Det ger oss uppenbart

$$B_{99\%} = 0.99 \cdot 4 = 3.96 \text{ Hz}.$$

Sedan tar vi $B_{3\text{dB}}$. Enligt ekvation 2.11 på sidan 26 i SIC (2017), så ska det vara det största f , sådant att

$$|X(f)| \geq \sqrt{\frac{1}{2}} \max_{f'} |X(f')|$$

gäller, vilket i detta fall uppenbart är

$$B_{3dB} = 4 \text{ Hz.}$$

Och slutligen B_{eff} . Enligt ekvation 2.12 på sidan 26 i SIC (2017), så har vi den effektiva bandbredden

$$B_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 |X(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df}}.$$

Vi bestämmer de två integralerna var för sig. Först betraktar vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-4}^4 \frac{25}{16} df = \frac{25}{2}.$$

Betrakta nu den andra integralen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |X(f)|^2 df &= \int_{-4}^4 \frac{25}{16} f^2 df \\ &= \frac{200}{3}, \end{aligned}$$

Insatt i första uttrycket har vi då

$$B_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{200/3}{25/2}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx \frac{4}{1.73} \approx 2.3 \text{ Hz.}$$

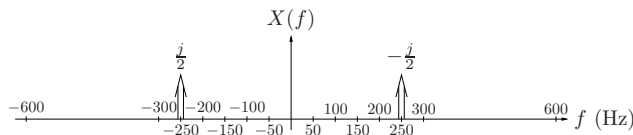
Svar: $B_{99\%} = 3.96 \text{ Hz.}$ $B_{3dB} = 4 \text{ Hz.}$ $B_{\text{eff}} \approx 2.3 \text{ Hz.}$

7

Vi har en signal $x(t) = \sin(500\pi t)$ som samplas med samplingsfrekvens f_s och sedan rekonstrueras idealt. Låt $y[n]$ beteckna den samplade signalen, och låt $z(t)$ beteckna den rekonstruerade signalen. Enligt T&F, sidan 19, har insignalen $x(t)$ fouriertransform

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{j2} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)) \\ &= \frac{j}{2} (\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)). \end{aligned}$$

Grafiskt:



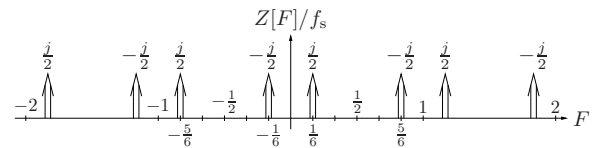
Vi noterar att signalen $x(t)$ har frekvens $f_0 = 250 \text{ Hz}$.

- a. Med sampelfrekvens $f_s = 600 \text{ Hz}$, så har vi $f_0 < f_s/2$. Då uppfylls samplingsteoremet. Med ideal rekonstruktion, så får vi då tillbaka den ursprungliga signalen, alltså $z(t) = x(t) = \sin(500\pi t)$.

- b. Med samplingsfrekvens $f_s = 300 \text{ Hz}$, så har vi $f_0 > f_s/2$. Alltså uppfylls inte samplingsteoremet, och vi kommer att få vikning som resultat. Den samplade signalens spektrum fås med Enligt Poissons summationsformel (T&F, sidan 11) så har den samplade signalen $y[n]$ spektrum

$$Y[F] = f_s \sum_m X((F - m)f_s),$$

vilket grafiskt blir som följer.



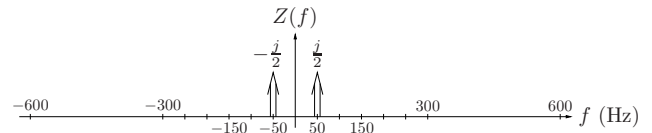
Vid ideal rekonstruktion har pulsformen fouriertransform

$$P(f) = \begin{cases} 1/f_s, & |f| < f_s/2, \\ 0, & \text{för övrigt,} \end{cases}$$

och den rekonstruerade signalen $z(t)$ har då spektrum

$$Z(f) = P(f)X[f/f_s],$$

vilket grafiskt blir som följer.



Som vi ser har vi impulser i frekvenserna $\pm(f_s - f_0)$. Detta identifierar vi som

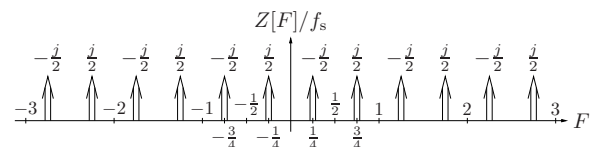
$$Z(f) = -\frac{j}{2} (\delta(f + (f_s - f_0)) - \delta(f - (f_s - f_0))),$$

och enligt T&F, sidan 19, så motsvarar detta signalen

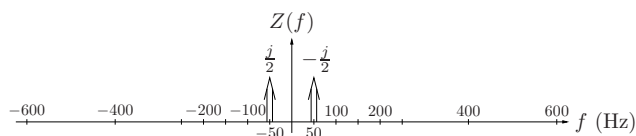
$$z(t) = -\sin(2\pi(f_s - f_0)t) = -\sin(100\pi t).$$

- c. Med samplingsfrekvens $f_s = 200 \text{ Hz}$, så har vi också $f_0 > f_s/2$. Alltså uppfylls inte samplingsteoremet här heller, och vi kommer att få vikning som resultat också i detta fall.

Med samma metodik som i deluppgift **b** får vi följande samplade spektrum.



Och vi får följande rekonstruerade spektrum.



Som vi ser har vi impulser i frekvenserna $\pm(f_s - f_0)$. Detta identifierar vi som

$$Z(f) = -\frac{j}{2} \left(\delta(f + (f_s - f_0)) - \delta(f - (f_s - f_0)) \right),$$

och enligt T&F, sidan 19, så motsvarar detta signalen

$$z(t) = -\sin(2\pi(f_s - f_0)t) = \sin(100\pi t),$$

där vi har noterat att $f_s - f_0$ är -50 Hz i detta fall.

Svar:

- $\sin(500\pi t)$
- $-\sin(100\pi t)$
- $\sin(100\pi t)$

8

Betrakta en kommunikationslänk som använder LDPC-kodning, den kanske mest moderna och kraftfulla kanalkodning som finns att tillgå. Under gynnsamma omständigheter, så överför systemet kodord bestående av 10,000 binära siffror varje millisekund. Koden som används har takten $R = 1/4$. I denna uppgift kan du modellera överföringen av varje enskild binär siffra via en binärsymmetrisk kanal, även om verkligheten typiskt är lite mer komplicerad än så.

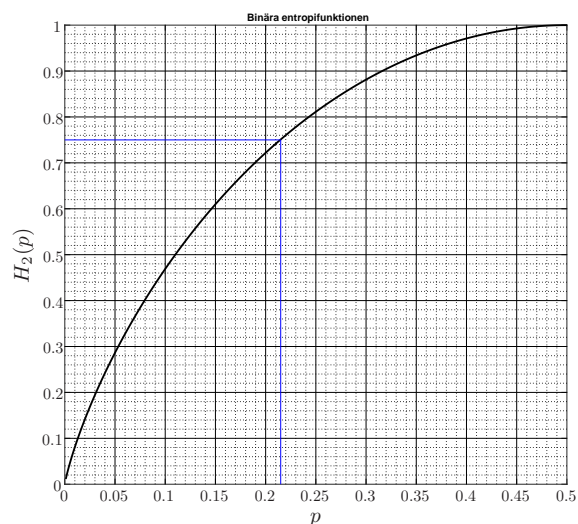
- Varje millisekund överförs 10^4 binära siffror. Det blir 10^7 binära siffror per sekund.
- Kodtakten är $R = 1/4$ och vi överför 10^7 binära siffror per sekund. Alltså överförs $2.5 \cdot 10^6$ bitar information per sekund.
- Vi utgår från kapacitetsuttrycket för en binärsymmetrisk kanal,

$$C = 1 - H_2(\epsilon).$$

Enligt uppgiftsformuleringen använder vi oss av en kraftfull kod, vilket vi tolkar som att den opererar nära kapaciteten. Alltså har vi $R \approx C$, vilket innebär att vi är intresserade av att avläsa

$$H_2(\epsilon) \approx 1 - R = 3/4.$$

Alltså:



Vi avläser

$$\epsilon \approx 0.215,$$

vilket alltså är den högsta felsannolikheten (mindre än $1/2$) som vi klarar av med denna kod.

- Låt N vara kodordslängden hos repetitionskoden. Då är kodtakten för denna kod $1/N$. Låt vidare P_e vara felsannolikheten för denna kod. Enligt ekvation 7.20 på sidan 149 i SIC (2017), så har vi

$$P_e \approx \left(2\sqrt{\epsilon(1-\epsilon)} \right)^V,$$

vilket vi skriver som

$$\begin{aligned} \log_{10}(P_e) &\approx V \cdot \log_{10} \left(2\sqrt{\epsilon(1-\epsilon)} \right) \\ &= V \cdot \log_{10} \left(2\sqrt{0.215(1-0.215)} \right) \\ &\approx V \cdot \log_{10} \left(2\sqrt{0.16} \right) \\ &= V \cdot \log_{10}(0.8), \end{aligned}$$

där vi har satt in värdet $\epsilon = 0.215$ från deluppgift c. Med hjälp av formelbladet finner vi

$$\log_2(10) \approx 3.32.$$

Då kan vi bestämma

$$\begin{aligned} \log_{10}(0.8) &= \frac{\log_2(0.8)}{\log_2(10)} = \frac{\log_2(8) - \log_2(10)}{\log_2(10)} \\ &\approx \frac{3 - 3.32}{3.32} = \frac{-0.32}{3.32} \approx -0.1. \end{aligned}$$

Då har vi

$$\log_{10}(P_e) \approx -V/10.$$

Insatt $P_e = 10^{-12}$, så har vi

$$-12 \approx -V/10 \quad \Rightarrow \quad V \approx 120.$$

Kodtakten är alltså $1/120$, och varje sekund kan vi då bara sända

$$10^7/120 \approx 8 \cdot 10^4.$$

informationsbitar per sekund, vilket uppenbart är betydligt mindre än vad vi fann i deluppgift **b**.

Svar:

- a. 10^7 binära siffror per sekund.
- b. $2.5 \cdot 10^6$ informationsbitar per sekund.
- c. $\epsilon \leq 0.215$.
- d. C:a $8 \cdot 10^4$ informationsbitar per sekund.