Tentamen i TSKS10 Signaler, information och kommunikation

Provkod: TEN1
Tid: 2017-06-02 **Kl:** 14:00–19:00
Lokal: T1, T2, U1, U2
Lärare: Mikael Olofsson, tel: 281343
Besöker salen: 15 och 17
Administratör: Carina Lindström, 013-284423, carina.e.lindstrom@liu.se
Institution: ISY
Hjälpmedel: På del 1 tillåts inga hjälpmedel.
På del 2 får följande användas:
Erik G. Larsson, *Signals, Information and Communications.*
Errata till 2014 års upplaga av ovanstående.
Mikael Olofsson, *Tables and Formulas for Signal Theory.*
Sune Söderkvist, *Formler & Tabeller.*
Råde/Westergren, *Mathematics Handbook for Science and Engineers* (Beta).
Physics Handbook
Formelsamling Fourieranalys
Lasse Alfredsson, *Formelsamling för Signaler & System.*
Antal uppgifter: 8
Bedömning: Denna tentamen består av två delar. Del 1 består av frågor och lämnas in innan del 2 påbörjas. Del 2 består av problem som ska lösas. Del 1 ger maximalt 15 poäng och del 2 ger maximalt 35 poäng. Total maxpoäng är alltså 50 poäng. Betygsgränser:

- Betyg tre: 25 poäng,
- Betyg fyra: 37 poäng,
- Betyg fem: 44 poäng.

Slarviga och svårlästa lösningar bedöms hårt, orimliga svar likaså.
Lösningar: Publiceras senast tre dagar efter tentamen på adress http://www.commsys.isy.liu.se/TSKS10
Resultat: Tentamensresultat, inklusive skrivningspoäng, meddelas via det automatiska Ladok-utskicket du erhåller via e-post. Detta skickas ut till alla tenterande som är registrerade på kursen, när tentaresultat förts in i Ladok, vanligen runt 12 arbetsdagar efter tentamen.
Tentavisning: På ISYs expedition i hus B, korridor D, mellan ingångarna 27 och 29, alldeles invid Café Java, c:a två veckor efter tentan.

Del 1: Teorifrågor (15 poäng)

Lös först denna del och lämna in den till tentavakten innan du går vidare till del 2. Du får inte ha några hjälpmedel till denna del.

1 Ge exempel på två kvantitativa bandbreddsmått. (4 p)

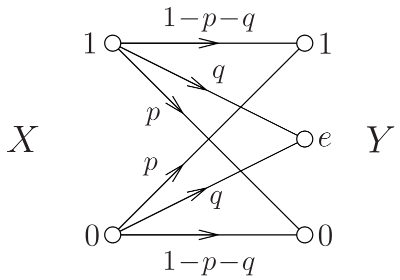
2 Hur fungerar direkt demodulation? Rita relevanta grafer. (5 p)

3 Vad menas med ”delay spread” och koherensbandbredd? Hur är de relaterade? (6 p)

Del 2: Problemlösning (35 poäng)

När du har lämnat in del 1 till tentavakten kan du börja på denna del. Här får du använda alla hjälpmedel som listas på försättsbladet.

4 Figuren nedan visar övergångssannolikheterna mellan insignal och utsignal, för en diskret kanal som kan kallas en binärsymmetrisk fel- och suddningskanal, mellan dess insignal X och dess utsignal Y. Denna kanal har två möjliga insymboler, 0 och 1, och tre möjliga utsymboler, 0, e och 1. Utsymbolen e kan tolkas som en suddning. Successiva användningar av kanalen är oberoende. (8 p)



a. Bestäm kanalens kapacitet uttryckt i bitar per kanalanvändning. (6p)

b. Bestäm de värden på p och q som gör det möjligt att kommunicera exakt felfritt över kanalen. Vad är kapaciteten då? (2p)

5 Låt $x_{\mathrm{I}}(t)$ och $x_{\mathrm{Q}}(t)$ vara basbandsrepresentationen av passbandssignalen $x(t)$ enligt ekvation 2.17 på sidan 28 i SIC. Låt vidare bärfrekvensen vara $f_{\mathrm{c}} = 50\,\mathrm{Hz}$. Betrakta (8 p)

$$y(t) = x(t)\cos(20\pi t).$$

a. Uttryck $y_{\mathrm{I}}(t)$ och $y_{\mathrm{Q}}(t)$ i $x_{\mathrm{I}}(t)$ och $x_{\mathrm{Q}}(t)$. (4p)

b. Uttryck $\bar{y}(t)$ och $\phi_y(t)$ i $\bar{x}(t)$ och $\phi_x(t)$. (4p)

6 Betrakta figur 5.10 på sidan 97 i SIC, där PAM-blocket använder pulsformen (5 p)

$$p(t) = \mathrm{sinc}(10t).$$

Kanalen har impulssvar

$$h(t) = 10\delta(t),$$

där $\delta(t)$ som vanligt är den tidskontinuerliga enhetsimpulsen. Slutligen är mottagarfiltret med impulssvar $\gamma(t)$ ett idealt LP-filter med gränsfrekvens 20 Hz. Bestäm alla värden på sampelperioden T_s, för vilka nyquistkriteriet är uppfyllt för denna kommunikationslänk.

7 Följande kod är avsedd för felrättning. Den är ett exempel på en s.k. simplexkod. Vi har nedan också angivit en avbildning från informationsbitarna till kodorden. (9 p)

Info			Kodord						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1

a. Bestäm kodens takt. (1 p)

b. Bestäm kodens förmåga att detektera respektive korrigera fel. (3 p)

c. Koden används för kommunikation över en binärsymmetrisk kanal med felsannolikhet ε. Ungefär hur ser sannolikheten för fel efter avkodningen ut? Beroendet av ε ska ges i storleksordning. (1 p)

d. Kan man ta bort en (samma) bit ur alla kodord utan att felrättningsförmågan försämras? Argumentera för ditt svar. (2 p)

e. Kan man ta bort en (samma) bit ur alla kodord utan att feldeteringsförmågan försämras? Argumentera för ditt svar. (2 p)

8 I cellulär kommunikation kommunicerar användare via basstationer. Ett sätt att öka kapaciteten för ett sådant system i termer av antal användare per ytenhet är att öka antalet basstationer, dvs. placera dem tätare. Betrakta nu en situation där basstationerna är utplacerade enligt ett regelbundet mönster. Om vi ökar antalet basstationer per ytenhet med faktorn 4, men bibehåller mönstret skalat, så halveras cellernas radie. Alltså halveras det maximala avståndet mellan användare och närmsta basstation. (5 p)

För att kunna erbjuda samma förutsättningar för en användare på detta maximala avstånd, så räcker det att mottagen effekt är oförändrad.

a. Hur mycket kan vi då minska sändareffekten per basstation och användare om vi har vägförlustexponenten $\gamma = 4$? Ge svar i dB.
Vi bortser här ifrån såväl storskalig som småskalig fädning och betraktar alltså endast sträckdämpningen. (3p)

b. Ökar eller minskar då den totala utsända effekten om också antalet användare ökar med faktorn 4?
För enkelhets skull räknar vi med att samtliga användare befinner sig på detta maximala avstånd från närmaste basstation. (2p)

TSKS10 - liten ordlista

Engelska	Svenska	Sammanhang i kursen (om inte uppenbart)
aliasing	vikning	sampling/rekonstruktion
alphabet	alfabet	
ambiguity function	mångtydighetsfunktion	fördröjningsestimering
band-limited	bandbegränsad	signalrepresentation
bandpass	bandpass-	signalrepresentation
bandwidth	bandbredd	
bandwidth-limited regime	bandbreddsbegränsat område	kapacitet/LTI kanaler
baseband	basband	signalrepresentation
biased coin	skevt mynt	
binary channel	binär kanal	
binary digit	binär siffra	
binary symmetric channel	binär-symmetrisk kanal	
bit	bit	
capacity	kapacitet	kodning/felrättning
carrier frequency	bärfrekvens	modulering
channel coding	kanalkodning	
channel state information	kanalkännedom	digital kommunikation
channel use	kanalanvändning	
code	kod	
codebook	kodbok	
codeword	kodord	kodning/felrättning
coherence bandwidth	koherensbandbredd	LTI kanaler
coherence interval	koherensintervall	LTI kanaler
coherence time	koherenstid	kanaler
conditional probability	betingad sannolikhet	
conditioned on	betingat på	i sannolikhetslära
constellation	konstellation	
converse theorem	omvändning	
convolution	faltning	LTI system
convolutional code	faltningskod	kodning/felrättning
correlation	korrelation	
decoder	avkodare	kodning
degrees of freedom	frihetsgrader	signalrepresentation
delay spread		LTI kanaler
demodulation	demodulering	
dimensionality	dimensionalitet	signalrepresentation
discrete memoryless channel	diskret minneslös kanal	
diversity	diversitet	
downconversion	nedblandning	modulering
downsampling	nedsampling (decimering)	
encoder	kodare	kodning
entropy	entropi	
envelope	envelopp	signalrepresentation
erasure channel	suddkanal	kodning
equalization	utjämning	digital kommunikation
error floor	felgolv	
error probability	felsannolikhet	
error protection	felskydd	
expected value	väntevärde	
fading	fädning	trådlösa kanaler
fair coin	plant mynt	
frequency flat	frekvens-flat	LTI kanaler
frequency response	frekvenssvar	LTI system
frequency selective	frekvens-selektiv	LTI kanaler
Gaussian noise	gaussiskt brus	
ghost peak	spöktopp	fördröjningsestimering
Hamming distance	hammingavstånd	kodning/felrättning
impedance	impedans	kablar
impulse response	impulssvar	LTI system

inphase/quadrature		
large-scale fading	storskalig fädning	trådlösa kanaler
load	last	kablar
lossless compression	förlustfri kompression	
lossy compression	icke-förlustfri kompression	
low-density parity check		
lowpass	lågpass-	signalrepresentation
matched load	anpassad last	kablar
memoryless	minneslös	kanal
minimum distance	minimiavstånd	kodning/felrättning
mismatched load	missanpassad last	kablar
modulation	modulering	
modulation	modulation	
multipath propagation	flervägsutbredning	trådlösa kanaler
mutual information	ömsesidig information	kodning/felrättning
narrowband	smalbandig	signalrepresentation
noise	brus	
parity check	paritetskontroll	kodning/felrättning
path loss	sträckdämpning	trådlösa kanaler
phase	fas	signalrepresentation
phase modulation	fasmodulering	
phase-shift keying		
pilot waveform	pilot(-vågform)	digital kommunikation
power-limited regime	effektbegränsat område	kapacitet/LTI kanaler
probability	sannolikhet	
probability density function	täthetsfunktion	
probability mass function		
propagation loss	utbredningsförlust	trådlösa kanaler
pulse-amplitude modulation	pulsamplitudmodulering	
pulse code modulation	pulskodmodulering	datakompression
quadrature amplitude modulation	kvadraturamplitudmodulering	
quantization	kvantisering	
random variable	slumpvariabel, stokastisk variabel	
rate	takt	kodning/felrättning
redundancy	redundans	kodning/felrättning
repetition code	repetitionskod	kodning/felrättning
reverse link		digital kommunikation
runlength coding	skurlängdskodning	datakompression
sampling theorem	samplingsteorem	
shadow fading	skuggfädning	trådlösa kanaler
signal-to-noise ratio	signal-till-brus-förhållande	
small-scale fading	småskalig fädning	trådlösa kanaler
source	källa	
source coding	källkodning	
spectral efficiency	spektraleffektivitet	digital kommunikation
standard deviation	standardavvikelse	
string	sträng	
symbol	symbol	
symbol rate	symboltakt	
synchronization	synkronisering	digital kommunikation
thermal noise	termiskt brus	
time constant	tidskonstant	LTI system
time-delay	(tids)fördröjning	
time-delay estimation	fördröjningsestimering	
time-limited	tidsbegränsad	signalrepresentation
transmission line		
upsampling	uppsampling	
variance	varians	
waveform	vågform	
white noise	vitt brus	
wired	trådbunden	
wireless	trådlös	

Some Handy Formulas

Trigonometric Identities

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)+\sin^2(x) =& 1\\
\sin(x+y) =& \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)\\
\cos(x+y) =& \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)\\
\sin(2x) =& 2\sin(x)\cos(x)\\
\cos(2x) =& \cos^2(x)-\sin^2(x) = 1-2\sin^2(x) = 2\cos^2(x)-1\\
\sin(x)\cos(y) =& \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))\\
\sin(x)\sin(y) =& \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))\\
\cos(x)\cos(y) =& \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))
\end{aligned}$$

Fourier Transform

- Suppose $x(t)$ and $X(f)$ constitute a Fourier transform pair,

$$\begin{aligned}
X(f) =& \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt, \quad \text{and}\\
x(t) =& \mathscr{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,df.
\end{aligned}$$

  Then

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{x(-t)\} &= X(-f)\\
\mathscr{F}\{x(at)\} &= \frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right), \qquad a>0\\
\mathscr{F}\{x(t-T)\} &= e^{-j2\pi fT}X(f)\\
\mathscr{F}\{x(t)\cos(2\pi f_c t)\} &= \frac{1}{2}(X(f-f_c)+X(f+f_c))\\
\mathscr{F}\{x(t)\sin(2\pi f_c t)\} &= \frac{1}{2j}(X(f-f_c)-X(f+f_c))
\end{aligned}$$

- If $X_1(f) = \mathscr{F}\{x_1(t)\}$ and $X_2(f) = \mathscr{F}\{x_2(t)\}$ are two Fourier transform pairs, then

$$\mathscr{F}\{(x_1 * x_2)(t)\} = X_1(f)X_2(f)$$
$$\mathscr{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = (X_1 * X_2)(f)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)X_2^*(f)\,df$$

- Some basic transform pairs:

$$x(t) = \cos(2\pi f_c t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2}(\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c))$$
$$x(t) = \sin(2\pi f_c t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2j}(\delta(f-f_c)-\delta(f+f_c))$$
$$x(t) = \operatorname{sinc}(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \begin{cases} 1, & |f| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \operatorname{sinc}(f)$$
$$x(t) = e^{-|t|} \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{2}{1+4\pi^2 f^2}$$
$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \ge 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$$
$$x(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \pi e^{-2\pi|f|}$$

Some Useful Numerical Approximations

$$2^{1.44} \approx e \approx 2.72 \qquad 2^{1.59} \approx 3 \qquad 2^{2.59} \approx 6 \qquad 2^{6.64} \approx 100$$
$$e^{2.3} \approx 10 \qquad \pi^2 \approx 10 \qquad \sqrt{3} \approx 1.73 \qquad 3^{1/3} \approx 1.44$$

TSKS10 Signaler, information och kommunikation

Lösningar till tentan 2017-06-02

Mikael Olofsson, mikael.olofsson@liu.se

Del 1: Teorifrågor (15 poäng)

1
Se avsnitt 2.1.3 på sidorna 25-26 i SIC (2017).

2
Se avsnitt 2.2.1 på sidorna 27-28 i SIC (2017).

3
Se avsnitt 8.1.2 på sidorna 192-195 i SIC (2017).

Del 2: Problemlösning (35 poäng)

4
Vi använder beteckningarna

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \Pr\{X=x\}, \\ p_Y(y) &= \Pr\{Y=y\}, \\ p_{Y|X}(y|x) &= \Pr\{Y=y|X=x\}. \end{aligned}$$

För den givna kanalen har vi

$$p_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1-p-q, & x=y\in\{0,1\}, \\ q, & y=e, \\ p, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

a. Vi vill bestämma kanalens kapacitet,

$$C = \max I(X;Y),$$

där $I(X;Y)$ är den ömsesidiga informationen av X och Y, och där maximeringen är över alla fördelningar av X. Av kanalens symmetri drar vi slutsatsen att $I(X;Y)$ maximeras av en symmetrisk fördelning av X, alltså

$$p_X(0) = p_X(1) = 1/2.$$

Vad vi har kvar att bestämma är $I(X;Y)$ för det fallet. vi har (Ekv. 6.31)

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X).$$

Vi vill alltså bestämma entropierna $H(Y)$ och $H(Y|X)$. För att bestämma $H(Y)$ behöver vi $p_Y(y)$, som ges av

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \sum_x p_X(x) p_{Y|X}(y|x) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(1-q), & y\in\{0,1\}, \\ q, & y=e. \end{cases} \end{aligned}$$

Då får vi

$$\begin{aligned} H(Y) &= -p_Y(0)\log_2(p_Y(0)) - p_Y(1)\log_2(p_Y(1)) \\ &\quad - p_Y(e)\log_2(p_Y(e)) \\ &= -(1-q)\log_2\left(\frac{1}{2}(1-q)\right) - q\log 2(q). \end{aligned}$$

Den betingade entopin ges av (Ekv 6.32)

$$H(Y|X) = \sum_x p_X(x) H(Y|X=x),$$

där vi har

$$\begin{aligned} H(Y|X=x) &= -\sum_y p_{Y|X}(y|x) \\ &= -p_{Y|X}(0|x)\log_2(p_{Y|X}(0|x)) \\ &\quad - p_{Y|X}(1|x)\log_2(p_{Y|X}(1|x)) \\ &\quad - p_{Y|X}(e|x)\log_2(p_{Y|X}(e|x)) \\ &= -(1-p-q)\log_2(1-p-q) \\ &\quad - p\log_2(p) - q\log_2(q) \end{aligned}$$

vilket resulterar i

$$\begin{aligned} &H(Y|X) = \\ &= -(1-p-q)\log_2(1-p-q) - p\log_2(p) - q\log_2(q). \end{aligned}$$

Alltså ges den ömsesidiga informationen av

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) =$$
$$= -(1-q)\log_2\left(\frac{1}{2}(1-q)\right) - q\log 2(q)$$
$$-\Big(-(1-p-q)\log_2(1-p-q) - p\log_2(p) - q\log_2(q)\Big)$$
$$= (1-p-q)\log_2(1-p-q) + p\log_2(p)$$
$$-(1-q)\log_2\left(\frac{1}{2}(1-q)\right).$$

b. För att kunna kommunicera felfritt måste vi ha en situation då sända symboler resulterar i mottagna symboler enligt ett ett-till-ett-förhållande eller enligt ett ett-till-flera-förhållande. Då kan vi från mottagna symboler med säkerhet säga vilka de sända symbolerna var. Det uppfyller vi endast om vi har $(p,q) = (0,0)$ eller $(p,q) = (1,0)$. I båda de fallen har vi en felfri binär kanal. Kapaciteten blir då förstås $C = 1$ bit per kanalanvändning.

Not: Om du inte köper resonemanget att den ömsesidiga informationen maximeras av den symmetriska fördelningen baserat på observationen att kanalen är symmetrisk, så kan du låta $p_X(0) = p_0$, vilket inte påverkar $H(Y|X)$. Vad det gör, däremot, är att det påverkar $H(Y)$. Uttryck $p_Y(y)$ i p_0 och bestäm $H(Y)$ uttryckt i p_0. Slutligen, studera derivatan av den ömsesidiga informationen med avseende på p_0, sätt lika med noll, och bestäm p_0 därifrån. Du finner då att $p_0 = 1/2$ maximerar $H(Y)$.

Svar:

a. $C = (1-p-q)\log_2(1-p-q) + p\log_2(p)$ $-(1-q)\log_2\left(\frac{1}{2}(1-q)\right)$.

b. $(p,q) = (0,0)$ respektive $(p,q) = (1,0)$, med $C = 1$.

5

Detta är uppgift 2-12 i SIC (2017). Se därför lösningsförslaget för den uppgiften i kursmaterialet.

Svar: —

6

Givet är, med notation från figur 5.10 på sidan 97 i SIC (2017),

$$p(t) = \mathrm{sinc}(10t),$$
$$h(t) = 10\delta(t).$$

Låt $P(f)$ och $H(f)$ fara motsvarande frekvenssvar. Med hjälp av t.ex. fouriertransformtabellen på sidorna 18-19 i Tables and Formulas for Signal Theory, så ser vi att vi har

$$P(f) = \begin{cases} 1/10, & |f| < 5\,\mathrm{Hz}, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Vidare enligt uppgiftsformuleringen, så är mottagarfiltret med impulssvar $\gamma(t)$ ett idealt LP-filter med gränsfrekvens 20 Hz. Alltså har det filtret frekvenssvar

$$\Gamma(f) = \begin{cases} 1, & |f| < 20\,\mathrm{Hz}, \\ 0, & \text{för övrigt,} \end{cases}$$
$$H(f) = 1.$$

Med samma notation som i SIC, så inför vi den resulterande pulsformens fouriertransform

$$R(f) = H(f)\Gamma(f)P(f) = \begin{cases} 1, & |f| < 5\,\mathrm{Hz}, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Med hjälp av t.ex. fouriertransformtabellen på sidan 19 i Tables and Formulas for Signal Theory, så ser vi att vi har motsvarande pulsform

$$r(t) = 10\,\mathrm{sinc}(10t)$$

Vi är nu intresserade av den samplade versionen av $r(t)$, dvs.

$$\tilde{r}[n] = r(nT_\mathrm{s}),$$

där T_s är sampelperioden som vi vill bestämma. Enligt ekvation 5.38 på sidan 100 i SIC (2017), så ska då

$$\tilde{r}[n] = r(nT_\mathrm{s}) = A\delta[n]$$

gälla, där A är någon nollskild reell konstant, och där $\delta[n]$ är den tidsdiskreta enhetsimpulsen. Vi måste alltså se till att samplingen för alla nollskilda heltal n hamnar i en nollgenomgång för $r(t)$. Det är uppfyllt om vi har $T_\mathrm{s} = K/10$ [s], där K är ett positivt heltal.

Svar: $T_\mathrm{s} = K/10$, där K är ett positivt heltal.

7

Vi är givna följande kod och avbildning av informationsbitar på kodord:

Info			Kodord						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1

a. Kodordslängden är $N = 7$ bitar och kodens storlek är $M = 8$ kodord. Kodens takt ges av ekvation 7.6 på sidan 144 i SIC (2017). Vi har alltså takten

$$R = \frac{\log_2(M)}{N} = \frac{3}{7}$$

b. Kodens förmåga att detektera och korrigera fel bestäms av dess minavstånd. Genom att jämföra kodorden med varandra, så ser vi att inga par av kodord skiljer sig åt i mindre än fyra positioner, och det finns par av kodord som skiljer sig åt i exakt fyra positioner, exempelvis 0000000 och 0010111. Minavståndet är alltså $d_{\min} = 4$. Feldetekteringsförmågan v och felrättningsförmågan t ges då av

$$v = d_{\min} - 1 = 3, \qquad t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor = 1.$$

c. Felsannolikheten P_e är i storleksordning

$$P_\mathrm{e} \sim \varepsilon^{\lceil d_{\min}/2 \rceil} = \varepsilon^2,$$

enligt ekvation 7.15 på sidan 147 i SIC (2017).

d. Oavsett vilken position vi väljer att ta bort, så minskas minavståndet till $d_{\min} = 3$. Felrättningsförmågan blir då fortfarande

$$t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor = 1.$$

Alltså kan vi ta bort en position i koden, utan att felrättningsförmågan ändras.

e. Vi har notera att om vi tar bort en position i koden, så minskas minavståndet till $d_{\min} = 3$, oavsett vilken position vi väljer. Feldetekteringsförmågan blir då

$$v = d_{\min} - 1 = 2,$$

Alltså kan vi inte ta bort en position i koden, utan att felrättningsförmågan ändras.

Svar:

a. Takt $R = 3/7$

b. Feldetekteringsförmåga: $v = 3$
Felrättningsförmåga: $t = 1$

c. Felsannolikhet $P_\mathrm{e} \sim \varepsilon^2$.

d. Ja, man kan ta bort en position utan att felrättningsförmågan ändras.

e. Nej, man kan inte ta bort en position utan att feldetekteringsförmågan ändras.

8

Detta handlar om sträckdämpning. Vi har markbunden radiokommunikation över ett okänt avstånd, säg r.

a. Vi frågar oss hur mycket sändareffekten per basstation och användare kan minskas om vi halverar detta avstånd och kräver att mottagen effekt är oförändrad. Enligt uppgiftsformuleringen ska vi endast betrakta sträckdämpning med vägförlustexponenten $\gamma = 4$.

Enligt ekvation 9.28 på sidan 215 i SIC (2017) så ges den mottagna effekten P_{RX} av

$$P_{\mathrm{RX}} = K(r/r_0)^{-\gamma} P_{\mathrm{TX}}, \tag{1}$$

för någon konstant K, där r är gångvägen, r_0 är en referensgångväg, och P_{TX} är sänd effekt.
Låt nu $r' = r/2$ och P'_{TX} vara det nya avståndet respektive den nya sändareffekten. Då får vi enligt uppgiftsformuleringen också

$$P_{\mathrm{RX}} = K(r'/r_0)^{-\gamma} P'_{\mathrm{TX}}. \tag{2}$$

Likställer vi nu ekvationerna 1 och 2, så finner vi att vi har

$$P'_{\mathrm{TX}} = (r/r')^{-\gamma} P_{\mathrm{TX}} = 2^{-4} P_{\mathrm{TX}}$$

Sändareffekten kan alltså skalas med faktorn 2^{-4}, vilket i dB blir

$$\begin{aligned}(2^{-4})_{\mathrm{dB}} &= 10 \cdot \log_1 0(2^{-4}) = -4 \cdot 10 \cdot \log_1 0(2) \\ &\approx -12\,\mathrm{dB}.\end{aligned}$$

b. Nu vill vi avgöra om den totala utsända effekten ökar eller minskar om också antalet användare ökar med faktorn 4. Enligt uppgiftsformuleringen ska vi räkna med att samtliga användare befinner sig på avståndet r' från närmaste basstation. Detta handlar helt enkelt om att alla förutsätts behöva samma sänd effekt.
Om antalet användare ökar med faktorn 4, så har vi att jämföra $4P'_{\mathrm{TX}}$ med P_{TX}. Vi har

$$4P'_{\mathrm{TX}} = 4 \cdot 2^{-4} P_{\mathrm{TX}} = 2^{-2} P_{\mathrm{TX}}.$$

Den totala utsända effekten skalas alltså med faktorn 2^{-2}. Slutsatsen är alltså att den totala utsända effekten minskar.

Not: Detta är en mycket förenklad bild. Kommunikationen för en användare störs även av kommunikationen för andra användare. Denna störning är också utsatt för samma vägförlustexponent. Då avstånden mellan användarna också halveras, behöver även denna störning tas med i beräkningen. Vidare är det en grov förenkling att alla användarna finns på samma avstånd från sin basstation. Det är betydligt mera rimligt att anta att användarna är likformigt fördelade över ytan. Det är då inte säkert att samma mottagen effekt ger samma kvalité för en användare. Den analysen är betydligt mer komplicerad, och inte lämpad som en tentamensuppgift.

Svar:

a. Sändareffekten per basstation och användare minskar med 12 dB.

b. Den totala utsända effekten minskar.