LINKÖPINGS UNIVERSITET, INST. FÖR SYSTEMTEKNIK
KOMMUNIKATIONSSYSTEM

TSKS10 Signaler, Information och Kommunikation

Tentamen TEN1, 2016–10–18, kl. 8.00 — 13.00

Skriv Ditt ID nummer på varje inlämnat blad och numrera sidorna. Högst en uppgift per sida. Använd **ej** baksida.

Tentan har två delar: del 1 (teori) och del 2 (problemlösning).
Tentan kan ge maximalt 50 poäng. Preliminära betygsgränser: 3: 25p, 4: 37p, 5: 44p

Motivera noga varje steg i lösningarna. Skriv läsligt och glöm ej att ge ett tydligt svar. Förenkla alla svar så långt som möjligt. Rimlighetskontrollera Dina svar. Orimliga svar ger alltid 0 poäng. Om du gör approximationer, beskriv hur noggranna de är och varför.

Tillåtna hjälpmedel:

- På del 1: inga hjälpmedel
- På del 2:
  - Kursboken *Signals, Information och Communications* av E. G. Larsson
  - Errata till *Signals, Information och Communications*
  - TSKS10 — liten ordlista
  - Tillåtna formelsamlingar: *Tables and formulas for signal theory* (M. Olofsson); *Formler och tabeller* (S. Söderkvist); *Beta Mathematics/Physics Handbook*; *Formelsamling Fourieranalys* (gult häfte); samt signaler-och-system formelsamlingen av L.-I. Alfredsson
- Elektronisk utrustning (miniräknare, dator, etc.) eller egna anteckningar ej tillåtna.

Efter att Du har slutfört del 1, lämna in denna till tentamensvakten innan Du tar fram böckerna och börjar med del 2.

Examinator: Erik G. Larsson, ISY, 013-281312, `erik.g.larsson@liu.se`.
Jourhavande lärare: Håkan Johansson, ISY, 013-281676. Besöker salen ca. kl. 9.00

Kursadministratör: Carina Lindström, 013-284423, `carina@isy.liu.se`.
Visning: 2 november, kl 14.00-15.00, på examinators kontor (ing. B29, A-korr, övre plan).
Lösningar till tentan finns på kurshemsidan efter tentamens slut.

Antal uppgifter som ingår i tentamen: 7. Antal sidor (inkl. detta försättsblad): 8.

Lycka till!

DEL 1: TEORIFRÅGOR (15p)

---

1. Beskriv två olika kvantitativa bandbreddsmått. Ge relevanta ekvationer och/eller rita relevanta figurer. (5p)

---

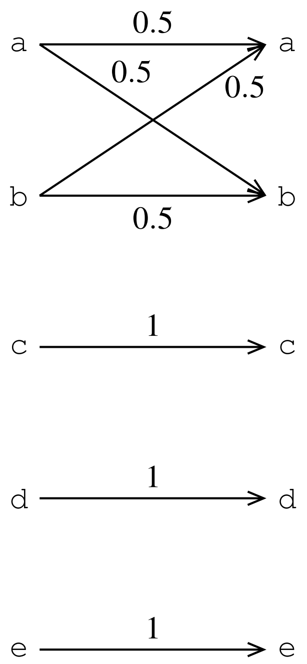
2. Rita ett blockschema över en digital kommunikationslänk och beskriv (mycket koncist) vilken roll de olika komponenterna har. (5p)

---

3. Vad är *koherenstid* hos en kanal? (5p)

DEL 2: PROBLEMLÖSNING (35p)

4. Följande diskreta minneslösa kanal tar en av fem möjliga insymboler (`a`, `b`, `c`, `d`, `e`) och ger en av fem möjliga utsymboler (`a`, `b`, `c`, `d`, `e`):

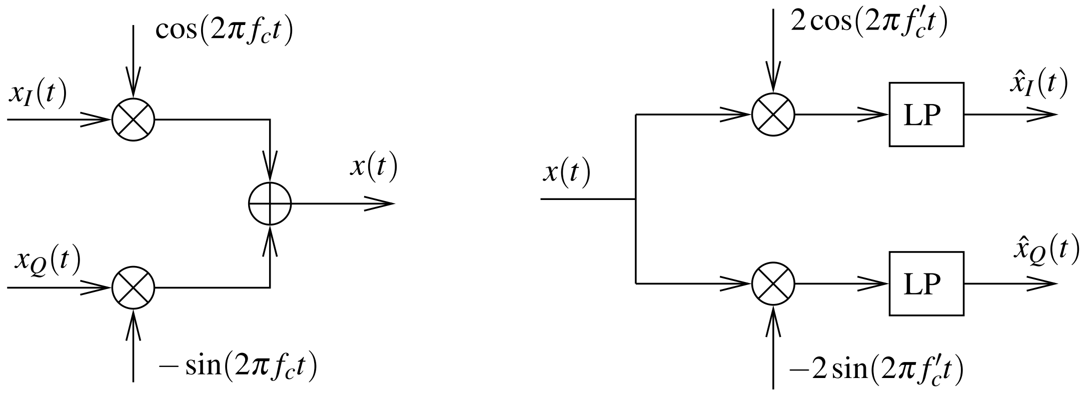


Låt x beteckna insymbolen och y utsymbolen.

(a) Beräkna kanalens kapacitet. Ange också de optimala sannolikheterna $P(\mathsf{x} = \mathtt{a})$, $\ldots$, $P(\mathsf{x} = \mathtt{e})$. Är dessa entydigt bestämda? (5p)

(b) Beskriv ett sätt att rimlighetskontrollera ditt svar i (a). (1p)

(c) Beskriv ett sätt att kommunicera felfritt över kanalen, med en takt som är lika med kanalens kapacitet. (3p)



(a) I/Q modulator med bärfrekvens f_c.

(b) I/Q demodulator med bärfrekvens f_c'.

5. Betrakta I/Q modulator/demodulatorn i figuren ovan. Modulatorn är inställd på bärfrekvensen f_c och demodulatorn är inställd på bärfrekvensen f_c', där $f_c' \neq f_c$. Det finns alltså en inbördes frekvensskillnad på $f_c' - f_c$ Hz. Som en konsekvens, så är i allmänhet

$$\hat{x}_I(t) \neq x_I(t), \qquad \hat{x}_Q(t) \neq x_Q(t).$$

   (a) Ge ett uttryck som relaterar $\hat{x}_I(t)$ och $\hat{x}_Q(t)$ till $x_I(t)$ och $x_Q(t)$. (3p)

   (b) Anta att $f_c' - f_c$ är känd hos demodulatorn. Härled och beskriv en mekanism (ge en explicit formel) med vilken $x_I(t)$ och $x_Q(t)$ kan återskapas från $\hat{x}_I(t)$ och $\hat{x}_Q(t)$. (3p)

   (c) Beskriv någon situation i praktiken där ett sådant frekvens-synkroniseringsfel uppkommer. (2p)

6. Du arbetar med att konstruera en algoritm för att komprimera en textfil med statistiskt oberoende symboler från alfabetet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}, \mathtt{g}\}$. En ingenjör har föreslagit följande kod:

a →00	b →11
c →0101	d →111
e →1010	f →100101
g →0110.	

(a) I ett experiment används koden för att komprimera symboler x som genererats enligt (1p)

$$P(\mathtt{x}=\mathtt{a}) = P(\mathtt{x}=\mathtt{b}) = P(\mathtt{x}=\mathtt{c}) = P(\mathtt{x}=\mathtt{d}) = P(\mathtt{x}=\mathtt{e}) = P(\mathtt{x}=\mathtt{f}) = 1/12$$

och

$$P(\mathtt{x}=\mathtt{g}) = 1/2.$$

Vad är den genomsnittliga längen på ett kodord efter kompressionen?

(b) Jämfor prestandan för koden med den teoretiska gränsen för en källa med sannolikheterna angivna i (a). Kommentera resultatet. (2p)

(c) Finns det något val av sannolikheter $P(\mathtt{x}=x)$ för vilket koden i fråga kan vara en Huffman-kod? Om ja, rita ett träd liknande det i figur 5.4 i S.I.C., som kan användas vid avkodning (dekompression). Om nej, visa varför koden inte kan vara en Huffman-kod (motivera noga). Diskutera konsekvenserna av det Du kommer fram till. (3p)

(d) Du har konstruerat en Huffman-kod för alfabetet ovan. (Du behöver inte skriva ned denna kod.) Dock har du upptäckt att när symbolerna, $x_1x_2x_3\cdots x_n$ (n =strängens längd) kommer in, så är de inte statistiskt oberoende av varandra. De är parvis korrelerade : x_1 och x_2 är korrelerade; x_3 och x_4 är korrelerade; x_5 och x_6 är korrelerade; och så vidare. Korrelationen är stark, till exempel, om $x_1 = \mathtt{a}$ så är sannolikheten 99.9% att $x_2 = \mathtt{b}$.

Fungerar din Huffman-kod fortfarande för att komprimera datat? Är den en bra metod? Om inte, föreslå ett bättre angreppssätt. (4p)

Du använda att $\log_2(3) \approx 1.6$.

7. Ett sampelvärde (reellt tal) x har en likformig fördelning mellan -1 och $+1$. Samplet i fråga kvantiseras på tre olika sätt:

   - $y_1 = [x]$, likformig kvantisering med Q bitar
   - $y_2 = [x]$, likformig kvantisering med $Q+1$ bitar
   - medelvärdet av y_1 och y_2:
$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

   (a) Vad är signal-till-brusförhållandet i y_1? (1p)

   (b) Vad är signal-till-brusförhållandet i y_2? (1p)

   (c) Bestäm signal-till-brusförhållandet i y_3. (6p)

Some Handy Formulas

Trigonometric Identities

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)+\sin^2(x) &= 1\\
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)\\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)\\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x)\\
\cos(2x) &= \cos^2(x)-\sin^2(x) = 1-2\sin^2(x) = 2\cos^2(x)-1\\
\sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))\\
\sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))\\
\cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))
\end{aligned}$$

Fourier Transform

- Suppose $x(t)$ and $X(f)$ constitute a Fourier transform pair,

$$\begin{aligned}
X(f) &= \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt, \quad \text{and}\\
x(t) &= \mathscr{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,df.
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{x(-t)\} &= X(-f)\\
\mathscr{F}\{x(at)\} &= \frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right), \qquad a>0\\
\mathscr{F}\{x(t-T)\} &= e^{-j2\pi fT}X(f)\\
\mathscr{F}\{x(t)\cos(2\pi f_c t)\} &= \frac{1}{2}(X(f-f_c)+X(f+f_c))\\
\mathscr{F}\{x(t)\sin(2\pi f_c t)\} &= \frac{1}{2j}(X(f-f_c)-X(f+f_c))
\end{aligned}$$

- If $X_1(f) = \mathscr{F}\{x_1(t)\}$ and $X_2(f) = \mathscr{F}\{x_2(t)\}$ are two Fourier transform pairs, then

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{(x_1 * x_2)(t)\} &= X_1(f)X_2(f) \\
\mathscr{F}\{x_1(t)x_2(t)\} &= (X_1 * X_2)(f) \\
\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)X_2^*(f)\,df
\end{aligned}$$

- Some basic transform pairs:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \cos(2\pi f_c t) && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2}(\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)) \\
x(t) &= \sin(2\pi f_c t) && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2j}(\delta(f-f_c)-\delta(f+f_c)) \\
x(t) &= \mathrm{sinc}(t) && \Leftrightarrow \quad X(f) = \begin{cases} 1, & |f| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\
x(t) &= \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \mathrm{sinc}(f) \\
x(t) &= e^{-|t|} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{2}{1+4\pi^2 f^2} \\
x(t) &= \begin{cases} e^{-t}, & t \ge 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} \\
x(t) &= \frac{1}{1+t^2} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \pi e^{-2\pi|f|}
\end{aligned}$$

Some Useful Numerical Approximations

$$\begin{array}{cccc}
2^{1.44} \approx e \approx 2.72 & 2^{1.59} \approx 3 & 2^{2.59} \approx 6 & 2^{6.64} \approx 100 \\
e^{2.3} \approx 10 & \pi^2 \approx 10 & \sqrt{3} \approx 1.73 & 3^{1/3} \approx 1.44
\end{array}$$

Preliminära svar/lösningsförslag

Eventuella synpunkter på rättningen beaktas om de inkommit skriftligen till examinator före den 11 november 2016.

1. T.ex. $B_{99\%}$ och $B_{3\,\mathrm{dB}}$, se S.I.C. avsnitt 2.1.3.

2. Se, t.ex. S.I.C. figur 1.11, med tillhörande diskussion.

3. Den tid under vilken kanalen kan betraktas som ett tidsinvariant system. Se, t.ex. S.I.C. avsnitt 8.1.1.

4. (a) Det är uppenbart att `a` och `b` inte går att skilja åt: om till exempel `a` tas emot så är det *enda* man kan säga att x var antingen `a` eller `b` med sannolikhet 50% vardera. Detta ger att vi effektivt har en kanal med fyra insymboler: "`ab`", `c`, `d`, och `e` och denna kanal är felfri. Således är kapaciteten 2 bpcu.

   Vill vi visa detta "matematiskt" utifrån definitionerna i S.I.C., så skriver vi ner den ömsesidiga informationen,

$$
\begin{aligned}
I(\mathsf{y};\mathsf{x}) = {} & P(\mathsf{x}=\mathtt{a})\left(\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1/2}{P(\mathsf{y}=\mathtt{a})}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1/2}{P(\mathsf{y}=\mathtt{b})}\right)\right)\\
& +P(\mathsf{x}=\mathtt{b})\left(\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1/2}{P(\mathsf{y}=\mathtt{a})}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1/2}{P(\mathsf{y}=\mathtt{b})}\right)\right)\\
& +P(\mathsf{x}=\mathtt{c})\log_2\left(\frac{1}{P(\mathsf{y}=\mathtt{c})}\right)\\
& +P(\mathsf{x}=\mathtt{d})\log_2\left(\frac{1}{P(\mathsf{y}=\mathtt{d})}\right)\\
& +P(\mathsf{x}=\mathtt{e})\log_2\left(\frac{1}{P(\mathsf{y}=\mathtt{e})}\right).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

   Observera att

$$
\begin{aligned}
& P(\mathsf{y}=\mathtt{a}) = P(\mathsf{y}=\mathtt{b}) = \frac{P(\mathsf{x}=\mathtt{a})+P(\mathsf{x}=\mathtt{b})}{2},\\
& P(\mathsf{y}=\mathtt{c}) = P(\mathsf{x}=\mathtt{c}),\\
& P(\mathsf{y}=\mathtt{d}) = P(\mathsf{x}=\mathtt{d}),\\
& P(\mathsf{y}=\mathtt{e}) = P(\mathsf{x}=\mathtt{e}).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

   De första två termerna i (1) kan förenklas till,

$$
(P(\mathsf{x}=\mathtt{a})+P(\mathsf{x}=\mathtt{b}))\log_2\left(\frac{1}{P(\mathsf{x}=\mathtt{a})+P(\mathsf{x}=\mathtt{b})}\right),
\tag{3}
$$

vilket bara beror på $P(\mathsf{x}=\mathtt{a})+P(\mathsf{x}=\mathtt{b})$, inte på $P(\mathsf{x}=\mathtt{a})$ och $P(\mathsf{x}=\mathtt{b})$ enskilt. Den ömsesidiga informationen kan därför skrivas som

$$
\begin{aligned}
I(\mathsf{y};\mathsf{x}) = {} & (P(\mathsf{x}=\mathtt{a})+P(\mathsf{x}=\mathtt{b}))\log_2\left(\frac{1}{P(\mathsf{x}=\mathtt{a})+P(\mathsf{x}=\mathtt{b})}\right) \\
& +P(\mathsf{x}=\mathtt{c})\log_2\left(\frac{1}{P(\mathsf{x}=\mathtt{c})}\right) \\
& +P(\mathsf{x}=\mathtt{d})\log_2\left(\frac{1}{P(\mathsf{x}=\mathtt{d})}\right) \\
& +P(\mathsf{x}=\mathtt{e})\log_2\left(\frac{1}{P(\mathsf{x}=\mathtt{e})}\right),
\end{aligned} \tag{4}
$$

vilket som mest kan anta värdet $\log_2(4)=2$ och det inträffar när $P(\mathsf{x}=\mathtt{a})+P(\mathsf{x}=\mathtt{b})=1/4$, $P(\mathsf{x}=\mathtt{c})=1/4$, $P(\mathsf{x}=\mathtt{d})=1/4$, och $P(\mathsf{x}=\mathtt{e})=1/4$.

Svar: Kapaciteten är 2 bpcu och uppnås då

$$
\begin{aligned}
P(\mathsf{x}=\mathtt{a})+P(\mathsf{x}=\mathtt{b}) &= 1/4 \\
P(\mathsf{x}=\mathtt{c}) &= 1/4 \\
P(\mathsf{x}=\mathtt{d}) &= 1/4 \\
P(\mathsf{x}=\mathtt{e}) &= 1/4.
\end{aligned} \tag{5}
$$

(b) Två exempel:

- Oavsett vad sannolikheterna är, så kan kapaciteten under inga omständigheter överstiga $H(\mathsf{y})=\log_2(5)$, vilket är $>\log_2(4)=2$.
- Kapaciteten måste, med de givna sannolikheterna, vara minst $\log_2(3)$ bpcu, vilket är <2. ($\log_2(3)$ bpcu är vad man får om man bara använder symbolerna `c`, `d` och `e`.)

(c) Vi använder bara `a`, `c`, `d` och `e` och tar bitarna i in-strängen parvis. De två bitarna i varje par väljer mellan de fyra symbolerna `a`, `c`, `d` och `e`. Ett inkommet `a` avkodas till `a`; ett inkommet `b` avkodas också till `a`.

(Detta är bara en av flera möjliga lösningar.)

5. Detta är uppgift 2–14 i S.I.C.

6. (a)

$$\frac{1}{12}(2+2+4+3+4+6)+\frac{1}{2}4=\frac{45}{12}=3.75$$

(b) Entropin för källan är

$$H(\mathsf{x})=6\cdot\left(\frac{1}{12}\log_2(12)\right)+\frac{1}{2}\log_2(2)=\frac{1}{2}\log_2(3\cdot 4)+\frac{1}{2}\approx 1+0.8+0.5=2.3$$

Den givna koden är alltså rätt dålig, för källan i fråga.

(c) Det kan inte vara en Huffman-kod. Om det hade varit en Huffman-kod, så hade man när som helst under avkodningsprocessen kunnat avgöra om man nått till slutet av ett kodord. (Med avkodning med hjälp av ett träd som i figur 5.4(b) i S.I.C., så skulle vi helt enkelt upptäcka att vi hamnat i ett av trädets löv.) Men detta är omöjligt, eftersom till exempel kodordet för `b` utgörs av de första två siffrorna i kodordnet för `d`. Så om vi ser `11`, så kan vi inte avgöra om vi ska avkoda till `b` eller om vi ska läsa en siffra till. Koden kan alltså inte vara en Huffman-kod.

En konsekvens av detta är att om flera kodord sätts samman till en längre sträng, så man på förhand måste veta när ett visst kodord slutar och nästa börjar. Detta kräver att man sätter in extra bitar eller på annat sätt separat förmedlar information om var kodorden börjar/slutar, vilket skulle reducera kodens totala effektivitet.

(En kod där inget av kodorden utgörs av första delen i något annat kodord kallas "prefix-fri". Denna egenskap är en väsentlig fördel. Huffman-koden är prefix-fri, men koden i vårt exempel här är det inte.)

(d) En Huffman-kod fungerar (naturligtvis) fortfarande, men den presterar inte speciellt bra då den försummar att symbolerna är parvis korrelerade. Man kan t.ex. använda ansatsen med "supersymboler", beskriven i S.I.C., avsnitt 5.5. En supersymbol består då av två ursprungliga symboler sammansatta parvis.

7. Låt $M = 2^Q$, som i S.I.C.

(a) Signal-till-brusförhållandet i y_1 är M^2, se S.I.C. ekvation (3.34). Uttryckt i decibel, är detta approximativt $6Q$.

(b) Signal-till-brusförhållandet i y_2 är $4M^2$, se S.I.C. ekvation (3.34). Uttryckt i decibel, är detta approximativt $6(Q+1)$.

(c) För att bestämma signal-till-brusförhållandet i y_3, notera först att

$$E[\mathsf{x}^2] = \frac{1}{3},$$

se S.I.C. ekvation (3.32). Svårigheten som uppkommer nu är att kvantiseringsfelen

$$\mathsf{w}_1 = \mathsf{x} - \mathsf{y}_1,$$

$$\mathsf{w}_2 = \mathsf{x} - \mathsf{y}_2$$

och

$$\mathsf{w}_3 = \mathsf{x} - \frac{\mathsf{y}_1 + \mathsf{y}_2}{2} = \frac{\mathsf{w}_1 + \mathsf{w}_2}{2}$$

är statistiskt beroende. Betingat på händelsen att x är sådant att $-\frac{1}{M} < w_1 < 0$ så gäller att $\mathsf{w}_2 = \mathsf{w}_1 + 1/(2M)$, och därför

$$\mathsf{w}_3 = \mathsf{w}_1 + \frac{1}{4M}$$

så

$$E\left[\mathsf{w}_3^2 \middle| -\frac{1}{M} < \mathsf{w}_1 < 0\right] = \frac{1}{1/M}\int_{-1/M}^{0}\left(t+\frac{1}{4M}\right)^2 dt = \frac{7}{48M^2}.$$

Men $E[\mathsf{w}_3^2|H]$ är densamma betingat på alla följande händelser H:

$$\ldots, \quad -\frac{1}{M} < \mathsf{w}_1 < 0, \quad 0 < \mathsf{w}_1 < \frac{1}{M}, \quad \frac{1}{M} < \mathsf{w}_1 < \frac{2}{M}, \quad \ldots$$

Således blir

$$E[\mathsf{w}_3^2] = \frac{7}{48M^2}$$

och

$$\mathrm{SNR} = \frac{E[x^2]}{E[\mathsf{w}_3^2]} = \frac{1/3}{7/48}M^2 = \frac{16}{7}M^2 = \frac{16}{7}2^{2Q}.$$

I decibel blir detta approximativt

$$6Q + 10\log_{10}\left(\frac{16}{7}\right).$$