LINKÖPINGS UNIVERSITET, INST. FÖR SYSTEMTEKNIK
KOMMUNIKATIONSSYSTEM

TSKS10 Signaler, Information och Kommunikation

Tentamen TEN1, 2016–08–16, kl. 14.00 — 19.00

Skriv Ditt ID nummer på varje inlämnat blad och numrera sidorna. Högst en uppgift per sida. Använd **ej** baksida.

Tentan har två delar: del 1 (teori) och del 2 (problemlösning).
Tentan kan ge maximalt 50 poäng. Preliminära betygsgränser: 3: 25p, 4: 37p, 5: 44p

Motivera noga varje steg i lösningarna. Skriv läsligt och glöm ej att ge ett tydligt svar. Förenkla alla svar så långt som möjligt. Rimlighetskontrollera Dina svar. Orimliga svar ger alltid 0 poäng. Om du gör approximationer, beskriv hur noggranna de är och varför.

Tillåtna hjälpmedel:

- På del 1: inga hjälpmedel
- På del 2:
  - Kursboken *Signals, Information och Communications* av E. G. Larsson
  - Errata till *Signals, Information och Communications*
  - TSKS10 — liten ordlista
  - Tillåtna formelsamlingar: *Tables and formulas for signal theory* (M. Olofsson); *Formler och tabeller* (S. Söderkvist); *Beta Mathematics/Physics Handbook*; *Formelsamling Fourieranalys* (gult häfte); samt signaler-och-system formelsamlingen av L.-I. Alfredsson
- Elektronisk utrustning (miniräknare, dator, etc.) eller egna anteckningar ej tillåtna.

Efter att Du har slutfört del 1, lämna in denna till tentamensvakten innan Du tar fram böckerna och börjar med del 2.

Examinator: Erik G. Larsson, ISY, 013-281312, erik.g.larsson@liu.se.
Jourhavande lärare: Mikael Olofsson, ISY, 013-281343. Besöker salen ca. kl. 15.30

Kursadministratör: Carina Lindström, 013-284423, carina@isy.liu.se.
Visning: 5 september, kl 14.00-15.00, på examinators kontor (ing. B29, A-korr, övre plan).
Lösningar till tentan finns på kurshemsidan efter tentamens slut.

Antal uppgifter som ingår i tentamen: 7. Antal sidor (inkl. detta försättsblad): 8.

Lycka till!

DEL 1: TEORIFRÅGOR (15p)

---

1. Beskriv två olika kvantitativa bandbreddsmått. Ge relevanta ekvationer och/eller rita relevanta figurer. (5p)

---

2. Om en kodbok med 204 755 012 kodord av längden 157 binära siffror har $d_{\min} = 5$, hur många bitfel kan den rätta? Endast svar, ingen uträkning behövs. (5p)

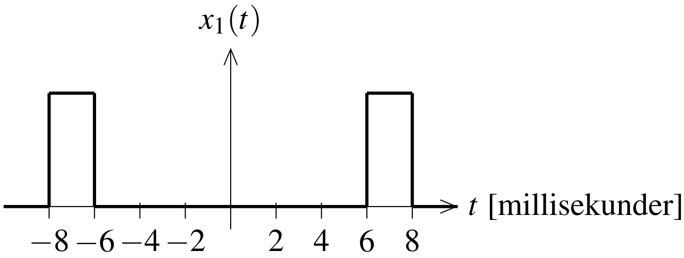
---

3. Vad är *koherensbandbredd* hos en LTI-kanal? (5p)

DEL 2: PROBLEMLÖSNING (35p)

4. Två olika vågformer, $x_1(t)$ och $x_2(t)$, är givna.

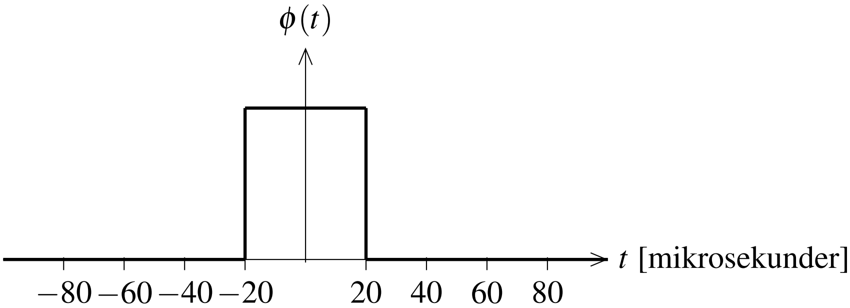
- $x_1(t)$ ser ut som följer:



- $x_2(t)$ ges av

$$x_2(t) = \phi(t - \tau_1) - \phi(t - \tau_2)$$

där $\tau_1 = 20$ millisekunder, $\tau_2 = 90$ millisekunder, och $\phi(t)$ ser ut som följer:



(a) Bestäm och skissa mångtydighetsfunktionen för vågformen $x_1(t)$. (2p)

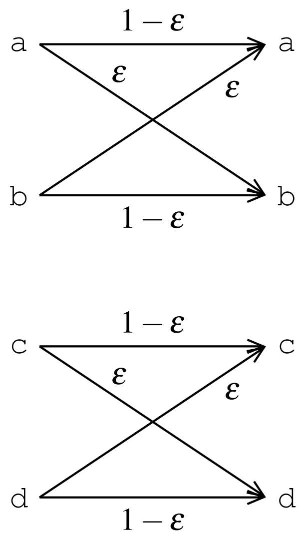
(b) Bestäm och skissa mångtydighetsfunktionen för vågformen $x_2(t)$. (1p)

Man önskar välja vågform (a) eller (b) för användning i ett ekolod, varvid $x_i(t)$ representerar en signal som ska förstärkas och sedan matas till en transducer som alstrar tryckvågor i vattnet. Ekolodet ska kunna mäta djupet i en maximalt 100 meter djup sjö med decimeterprecision. Ljudets hastighet i vatten är 1484 m/s. Efter signalförstärkaren i ekolodet sitter ett lågpassfilter med 3-dB gränsfrekvens B.

(c) Vilken av vågformerna (a) eller (b) bör man välja och varför? (4p)

(d) I (c), föreslå ett lämpligt värde på B (storleksordning). Motivera svaret. (3p)

5. Följande diskreta minneslösa kanal tar en av fyra möjliga insymboler (a, b, c, d) och ger en av fyra möjliga utsymboler (a, b, c, d):



(a) Låt x beteckna insymbolen och y utsymbolen. Anta att

$$P(\mathsf{x} = \mathtt{a}) = P(\mathsf{x} = \mathtt{b}) = P(\mathsf{x} = \mathtt{c}) = P(\mathsf{x} = \mathtt{d}) = \frac{1}{4}.$$

Beräkna den ömsesidiga informationen $I(\mathsf{x};\mathsf{y})$. (5p)

(b) Uttryck svaret i (a) i termer av kapaciteten $C_{BSC}(\varepsilon)$ för den binärsymmetriska kanalen (BSC) med bitfelsannolikhet ε. (1p)

(c) Anta att du har tillgång till en bra kod för kommunikation över den binärsymmetriska kanalen (BSC). Hur kan denna kod användas för att kommunicera över kanalen beskriven ovan? (5p)

6. En mobil, trådlös datalänk använder bandbredden 20 MHz och överför 60 Mbit/s. Bärfrekvensen är 3 GHz. Sändaren använder en uteffekt på 25 watt. Kanalens koherenstid är 5 millisekunder och dess koherensbandbredd är 1 MHz. Avståndet mellan sändaren och mottagaren är 100 meter.

   Man önskar femfaldiga datatakten, till 300 Mbit/s. Ett reklamblad har påstått att det enda som behöver ändras i det ovan beskrivna systemet är att öka bandbredden fem gånger, från 20 till 100 MHz. Är detta sant? Om ja, varför? Om inte, varför inte och vad mer måste ske? (6p)

7. Ett sampelvärde (reellt tal) x har en likformig fördelning mellan -1 och $+1$. Samplet i fråga kvantiseras på tre olika sätt:

   - $y_1 = [x]$, likformig kvantisering med Q bitar
   - $y_2 = [x]$, likformig kvantisering med $Q+1$ bitar
   - medelvärdet av y_1 och y_2:
   $$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

   (a) Vad är signal-till-brusförhållandet i y_1? (1p)

   (b) Vad är signal-till-brusförhållandet i y_2? (1p)

   (c) Bestäm signal-till-brusförhållandet i y_3. (6p)

Some Handy Formulas

Trigonometric Identities

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)+\sin^2(x) =& 1 \\
\sin(x+y) =& \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y) \\
\cos(x+y) =& \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y) \\
\sin(2x) =& 2\sin(x)\cos(x) \\
\cos(2x) =& \cos^2(x)-\sin^2(x) = 1-2\sin^2(x) = 2\cos^2(x)-1 \\
\sin(x)\cos(y) =& \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y)) \\
\sin(x)\sin(y) =& \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)) \\
\cos(x)\cos(y) =& \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))
\end{aligned}$$

Fourier Transform

- Suppose $x(t)$ and $X(f)$ constitute a Fourier transform pair,

$$\begin{aligned}
X(f) =& \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt, \quad \text{and} \\
x(t) =& \mathscr{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,df.
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{x(-t)\} &= X(-f) \\
\mathscr{F}\{x(at)\} &= \frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right), \qquad a>0 \\
\mathscr{F}\{x(t-T)\} &= e^{-j2\pi fT}X(f) \\
\mathscr{F}\{x(t)\cos(2\pi f_c t)\} &= \frac{1}{2}(X(f-f_c)+X(f+f_c)) \\
\mathscr{F}\{x(t)\sin(2\pi f_c t)\} &= \frac{1}{2j}(X(f-f_c)-X(f+f_c))
\end{aligned}$$

- If $X_1(f) = \mathscr{F}\{x_1(t)\}$ and $X_2(f) = \mathscr{F}\{x_2(t)\}$ are two Fourier transform pairs, then

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{(x_1 * x_2)(t)\} &= X_1(f)X_2(f) \\
\mathscr{F}\{x_1(t)x_2(t)\} &= (X_1 * X_2)(f) \\
\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)X_2^*(f)\,df
\end{aligned}$$

- Some basic transform pairs:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \cos(2\pi f_c t) && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2}(\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)) \\
x(t) &= \sin(2\pi f_c t) && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2j}(\delta(f-f_c)-\delta(f+f_c)) \\
x(t) &= \mathrm{sinc}(t) && \Leftrightarrow \quad X(f) = \begin{cases} 1, & |f| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\
x(t) &= \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \mathrm{sinc}(f) \\
x(t) &= e^{-|t|} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{2}{1+4\pi^2 f^2} \\
x(t) &= \begin{cases} e^{-t}, & t \ge 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} \\
x(t) &= \frac{1}{1+t^2} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \pi e^{-2\pi|f|}
\end{aligned}$$

Some Useful Numerical Approximations

$$\begin{array}{cccc}
2^{1.44} \approx e \approx 2.72 & 2^{1.59} \approx 3 & 2^{2.59} \approx 6 & 2^{6.64} \approx 100 \\
e^{2.3} \approx 10 & \pi^2 \approx 10 & \sqrt{3} \approx 1.73 & 3^{1/3} \approx 1.44
\end{array}$$

Preliminära svar/lösningsförslag

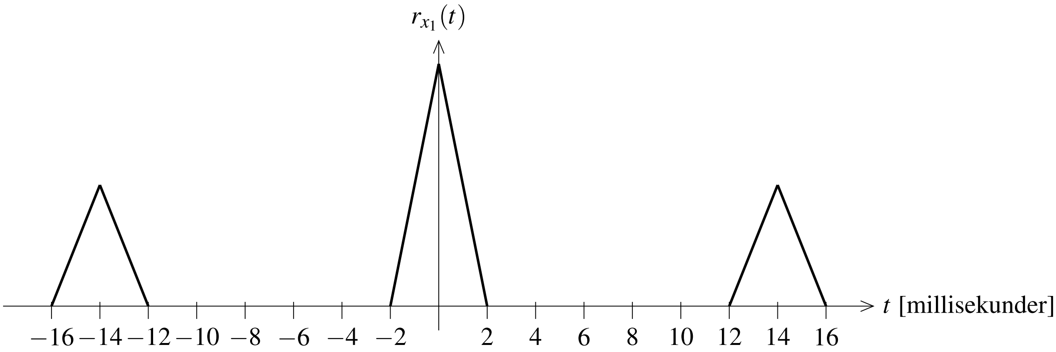
Eventuella synpunkter på rättningen beaktas om de inkommit skriftligen till ISYs studentexpedition innan 2016-09-09.

1. T.ex. $B_{99\%}$ och $B_{3\,\text{dB}}$, se S.I.C. avsnitt 2.1.3.

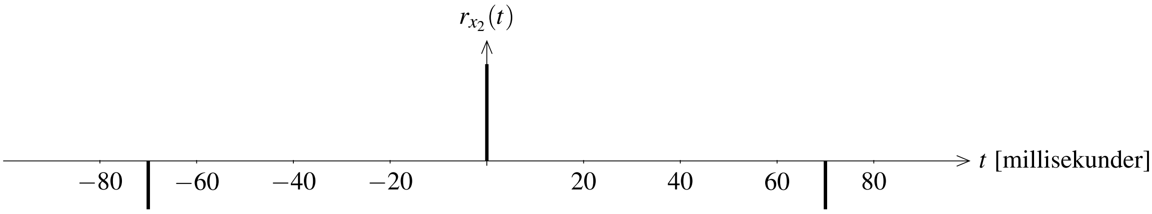
2. Den kan rätta $\left\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \right\rfloor = 2$ bitfel. Antalet kodord och deras längd är irrelevanta här.

3. Längden i Hz av ett frekvensintervall över vilket $|H(f)|$ kan betraktas som väsentligen konstant.

4. (a)



(b)



”Pinnarna” som sticker upp och ner i figuren är likbenta trianglar med basen 80 mikrosekunder. (Går inte att visualisera i figurens skala.)

(c) $x_1(t)$ har en bandbredd i storleksordningen $1/0.001 = 1000$ Hz. $x_2(t)$ har en bandbredd i storleksordningen $1/(40 \times 10^{-6}) = 25000$ Hz.

Vi behöver en bandbredd i storleksordningen

$$1500/0.1 = 15000 \text{ Hz.}$$

Vågformen $x_2(t)$ har en bandbredd i den storleksordningen, men $x_1(t)$ har det inte. Spöktopparna i mångtydighetsfunktionen för $x_2(t)$ ligger på ett avstånd om $70 \times 10^{-3} \times 1500 = 105$ meter. $x_2(t)$ är den mest lämpade av de två vågformerna.

(d) Filtret bör inte påverka $x_2(t)$ så att dess form förändras väsentligt. B bör vara i storleksordningen 25 kHz (eller större). Detta är naturligtvis inget exakt svar men en uppskattning av storleksordningen.

5. (a) Vi använder S.I.C. ekvation (7.52). Det blir 16 termer totalt, av vilka 8 är noll och de resterande termerna är parvis identiska. Efter förenkling:

$$\begin{aligned} I(\mathsf{x};\mathsf{y}) &= \frac{1}{4}(4(1-\varepsilon)(\log_2(1-\varepsilon)+\log_2(4))+4\varepsilon(\log_2(\varepsilon)+\log_2(4))) \\ &= (1-\varepsilon)\log_2(1-\varepsilon)+\varepsilon\log_2(\varepsilon)+\log_2(4) \\ &= 2-H_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

(b) Vi vet att $C_{BSC}(\varepsilon) = 1 - H_2(\varepsilon)$, se S.I.C. ekvation (7.46). Således är $I(\mathsf{x};\mathsf{y}) = 1 + C_{BSC}(\varepsilon)$.

(c) Vi tar bitarna i den sträng som ska skickas två och två. Den första biten i varje par använder vi till att välja om vi ska skicka någon av `a,b` eller någon av `c,d`. Den andra biten i varje par använder vi till att välja mellan `a` och `b` respektive `c` och `d`. Den första biten kan vi alltid överföra felfritt och den andra biten kommer att gå genom en BSC. Således kan vi skicka varannan bit i kodordet felfritt och varannan bit med hjälp av en kod för BSC.

6. Vi använder Shannon-Hartleys formel som en första ordningens approximation av prestanda:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{P}{BN_0}\right) = 60 \times 10^6 \text{ bitar/sekund.}$$

Detta ger att $P/(BN_0) = 7$.

Om vi ”bara” femfaldigar B, så ökar C till

$$C = 5B\log_2\left(1+\frac{P}{5BN_0}\right) \approx 126 \times 10^6 \text{ bitar/sekund.}$$

Det räcker alltså inte att öka B. Men om vi femfaldigar både B och P, så blir C istället

$$C = 5B\log_2\left(1+\frac{5P}{5BN_0}\right) = 300 \times 10^6 \text{ bitar/sekund,}$$

som önskat. Vi drar slutsatsen att kan vi nå målet om vi **både** ökar bandbredden och den totala uteffekten fem gånger.

All annan information som gavs i uppgiften är väsentligen irrelevant.

7. Låt $M = 2^Q$, som i S.I.C.

(a) Signal-till-brusförhållandet i y_1 är M^2, se S.I.C. ekvation (3.34). Uttryckt i decibel, är detta approximativt $6Q$.

(b) Signal-till-brusförhållandet i y_2 är $4M^2$, se S.I.C. ekvation (3.34). Uttryckt i decibel, är detta approximativt $6(Q+1)$.

(c) För att bestämma signal-till-brusförhållandet i y_3, notera först att

$$E[\mathsf{x}^2] = \frac{1}{3},$$

se S.I.C. ekvation (3.32). Svårigheten som uppkommer nu är att kvantiseringsfelen

$$\mathsf{w}_1 = \mathsf{x} - \mathsf{y}_1,$$

$$\mathsf{w}_2 = \mathsf{x} - \mathsf{y}_2$$

och

$$\mathsf{w}_3 = \mathsf{x} - \frac{\mathsf{y}_1 + \mathsf{y}_2}{2} = \frac{\mathsf{w}_1 + \mathsf{w}_2}{2}$$

är statistiskt beroende. Betingat på händelsen att x är sådant att $-\frac{1}{M} < w_1 < 0$ så gäller att $\mathsf{w}_2 = \mathsf{w}_1 + 1/(2M)$, och därför

$$\mathsf{w}_3 = \mathsf{w}_1 + \frac{1}{4M}$$

så

$$E\left[\mathsf{w}_3^2 \middle| -\frac{1}{M} < \mathsf{w}_1 < 0\right] = \frac{1}{1/M}\int_{-1/M}^{0}\left(t + \frac{1}{4M}\right)^2 dt = \frac{7}{48M^2}.$$

Men $E[\mathsf{w}_3^2|H]$ är densamma betingat på alla följande händelser H:

$$\ldots,\quad -\frac{1}{M} < \mathsf{w}_1 < 0,\quad 0 < \mathsf{w}_1 < \frac{1}{M},\quad \frac{1}{M} < \mathsf{w}_1 < \frac{2}{M},\quad \ldots$$

Således blir

$$E[\mathsf{w}_3^2] = \frac{7}{48M^2}$$

och

$$\mathrm{SNR} = \frac{E[x^2]}{E[\mathsf{w}_3^2]} = \frac{1/3}{7/48}M^2 = \frac{16}{7}M^2 = \frac{16}{7}2^{2Q}.$$

I decibel blir detta approximativt

$$6Q + 10\log_{10}\left(\frac{16}{7}\right).$$