LINKÖPINGS UNIVERSITET, INST. FÖR SYSTEMTEKNIK
KOMMUNIKATIONSSYSTEM

TSKS10 Signaler, Information och Kommunikation

Tentamen TEN1, 2016–05–31, kl. 14.00 — 19.00

Skriv ditt ID nummer på varje inlämnat blad, och numrera sidorna. Högst en uppgift per sida. Använd **ej** baksida.

Tentan har två delar: del 1 (teori) och del 2 (problemlösning).
Tentan kan ge maximalt 50 poäng. Preliminära betygsgränser: 3: 25p, 4: 37p, 5: 44p

Motivera noga varje steg i lösningarna. Skriv läsligt och glöm ej att ge ett tydligt svar. Förenkla alla svar så långt som möjligt. Rimlighetskontrollera Dina svar. Orimliga svar ger alltid 0 poäng. Om du gör approximationer, beskriv hur nogranna de är och varför.

Tillåtna hjälpmedel:

- På del 1: inga hjälpmedel
- På del 2:
  - Kursboken *Signals, Information och Communications* av E. G. Larsson
  - Errata till *Signals, Information och Communications*
  - TSKS10 — liten ordlista
  - Tillåtna formelsamlingar: *Tables and formulas for signal theory* (M. Olofsson); *Formler och tabeller* (S. Söderkvist); *Beta Mathematics/Physics Handbook*; *Formelsamling Fourieranalys* (gult häfte); samt signaler-och-system formelsamlingen av L.-I. Alfredsson
- Elektronisk utrustning (miniräknare, dator, etc.) eller egna anteckningar ej tillåtna.

Efter att Du slutfört del 1, lämna in denna till tentamensvakten innan Du tar fram böckerna och börjar med del 2.

Examinator: Erik G. Larsson, ISY, 013-281312, `erik.g.larsson@liu.se`. Besöker salen ca. kl. 15.30

Kursadministratör: Carina Lindström, 013-284423, `carina@isy.liu.se`.
Visning: 23 juni, kl 10.00-11.00, på examinators kontor (ing. B29, A-korr, övre plan).
Lösningar till tentan finns på kurshemsidan efter tentamens slut.

Antal uppgifter som ingår i tentamen: 7. Antal sidor (inkl. detta försättsblad): 10.

Lycka till!

DEL 1: TEORIFRÅGOR (15p)

1. Ge en tumregel för SNR i en likformigt kvantiserad signal. (Endast svar, ingen härledning behövs.) (5p)

---

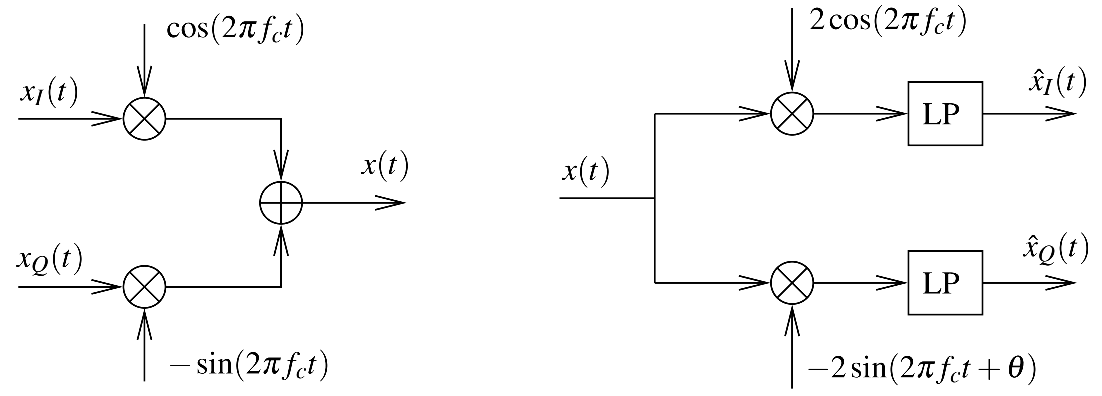
2. Om en kodbok med 1047550 kodord av längden 57 binära siffror har $d_{\text{min}} = 4$, hur många bitfel kan den rätta? (5p)

---

3. Vad är *koherenstid* hos en kanal? (5p)

DEL 2: PROBLEMLÖSNING (35p)

4. När man bygger en I/Q-demodulator i praktiken är det vanligt att den inte blir helt perfekt, så att sinus- och cosinus-grenarna inte ligger exakt $\pi/2$ i fas från varandra. Man säger att I/Q-demodulatorn har en obalans. En modell för detta ges av följande figur:



(a) I/Q-modulation.

(b) I/Q-demodulation med obalans.

där θ representerar obalansen. (Om $\theta = 0$ är demodulatorn perfekt.) Vi antar här att modulatorn är perfekt och bara demodulatorn har en obalans.

Som en konsekvens, så är i allmänhet

$$\hat{x}_I(t) \neq x_I(t), \qquad \hat{x}_Q(t) \neq x_Q(t).$$

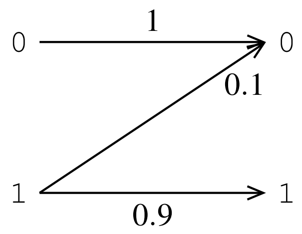
(a) Ge ett uttryck som relaterar $\hat{x}_I(t)$ och $\hat{x}_Q(t)$ till $x_I(t)$ och $x_Q(t)$. (3p)

(b) Anta att θ är känd hos demodulatorn. Härled och beskriv en mekanism (ge en explicit formel) med vilken $x_I(t)$ och $x_Q(t)$ kan återskapas från $\hat{x}_I(t)$ och $\hat{x}_Q(t)$. (4p)

(c) Beskriv minst ett sätt att rimlighetskontrollera ditt svar i (b). (1p)

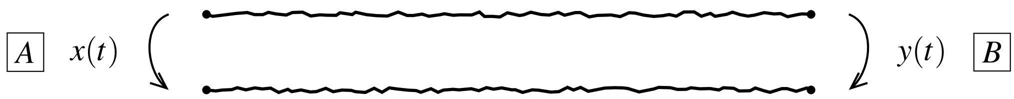
(d) För vilka värden på θ fungerar din lösning? (1p)

5. Betrakta följande kanal:



Beräkna kanalens kapacitet. En grafisk lösning är OK. Till Din hjälp och bifogat till tentan finns högupplösta figurer som visar $H_2(p)$ och dess derivata, $\frac{d}{dp}H_2(p)$. (8p)

6. En L meter lång kabel har två ändar, A och B, och karakteristisk impedans $Z_c = 50$ Ohm. Ände A ansluts till en ideal spänningsgenerator. Ände B ansluts till en last med impedans Z, parallellt med ett instrument (med oändlig in-impedans) som mäter spänningen över lasten. (Det är samma modell som i S.I.C.) En signal ska kommuniceras från A till B.



$x(t)$ och $y(t)$ är spänningarna över kabeländarna A resp. B.

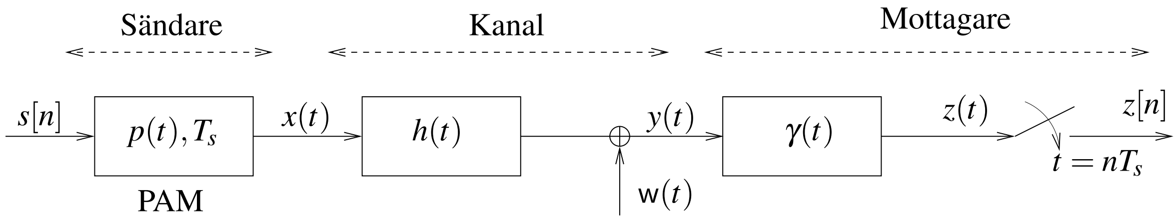
(a) Anta att $Z = 0$ (ände B kortsluten). Bestäm frekvenssvaret, $H(f)$, för systemet $y(t) = \mathscr{H}\{x(t)\}$, uttryckt i R_p, R_s, L_s och C_p. (1p)

(b) Anta att $Z = 50$ Ohm (lasten anpassad). Bestäm frekvenssvaret för systemet $y(t) = \mathscr{H}\{x(t)\}$, uttryckt i R_p, R_s, L_s och C_p. (3p)

(c) Anta att $Z = \infty$ (ände B öppen). Bestäm frekvenssvaret för systemet $y(t) = \mathscr{H}\{x(t)\}$, uttryckt i R_p, R_s, L_s och C_p. (3p)

(d) I (c), visa att om L är tillräckligt stor, så blir kanalen densamma som i (b), så när som på en skalfaktor. Hur stort måste L vara, relativt R_p, R_s, L_s och C_p, för att detta ska vara fallet? Bestäm ett uttryck för $H(f)$ i detta fall. (3p)

7. Betrakta en kommunikationslänk som använder pulsamplitudmodulation, med samma notation som i S.I.C., men där även additivt vitt brus $\mathsf{w}(t)$ tillkommer innan mottagarfiltret:



Det vita bruset $\mathsf{w}(t)$ har spektraltätheten 1.

(a) Skriv $z[n] = s[n] + \mathsf{w}[n]$. Ge ett uttryck för korrelationen mellan brus-samplen,

$$E[\mathsf{w}[m]\mathsf{w}[n]],$$

för godtyckliga m och n. (3p)

(b) Anta att

- $p(t) = \gamma(-t)$
- $p(t)$ och $\gamma(t)$ är idealt bandbegränsade till $[-B, B]$
- $h(t)$ är frekvens-flat över denna bandbredd: $H(f) = 1$, $-B \leq f \leq B$
- $p(t)$ är vald så att Nyquist-kriteriet är uppfyllt.
- Transmission sker inte snabbare än vad Nyquist-kriteriet tillåter: $1/T_s < 2B$; i övrigt, vet vi inget om B relativt T_s.

Förenkla resultatet i (a) så långt det är möjligt. (5p)

Some Handy Formulas

Trigonometric Identities

$$
\begin{aligned}
\cos^2(x)+\sin^2(x) =& 1 \\
\sin(x+y) =& \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y) \\
\cos(x+y) =& \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y) \\
\sin(2x) =& 2\sin(x)\cos(x) \\
\cos(2x) =& \cos^2(x)-\sin^2(x) = 1-2\sin^2(x) = 2\cos^2(x)-1 \\
\sin(x)\cos(y) =& \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y)) \\
\sin(x)\sin(y) =& \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)) \\
\cos(x)\cos(y) =& \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))
\end{aligned}
$$

Fourier Transform

- Suppose $x(t)$ and $X(f)$ constitute a Fourier transform pair,

$$
\begin{aligned}
X(f) =& \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt, \quad \text{and} \\
x(t) =& \mathscr{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,df.
\end{aligned}
$$

Then

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}\{x(-t)\} &= X(-f) \\
\mathscr{F}\{x(at)\} &= \frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right), \qquad a>0 \\
\mathscr{F}\{x(t-T)\} &= e^{-j2\pi fT}X(f) \\
\mathscr{F}\{x(t)\cos(2\pi f_c t)\} &= \frac{1}{2}(X(f-f_c)+X(f+f_c)) \\
\mathscr{F}\{x(t)\sin(2\pi f_c t)\} &= \frac{1}{2j}(X(f-f_c)-X(f+f_c))
\end{aligned}
$$

- If $X_1(f) = \mathscr{F}\{x_1(t)\}$ and $X_2(f) = \mathscr{F}\{x_2(t)\}$ are two Fourier transform pairs, then

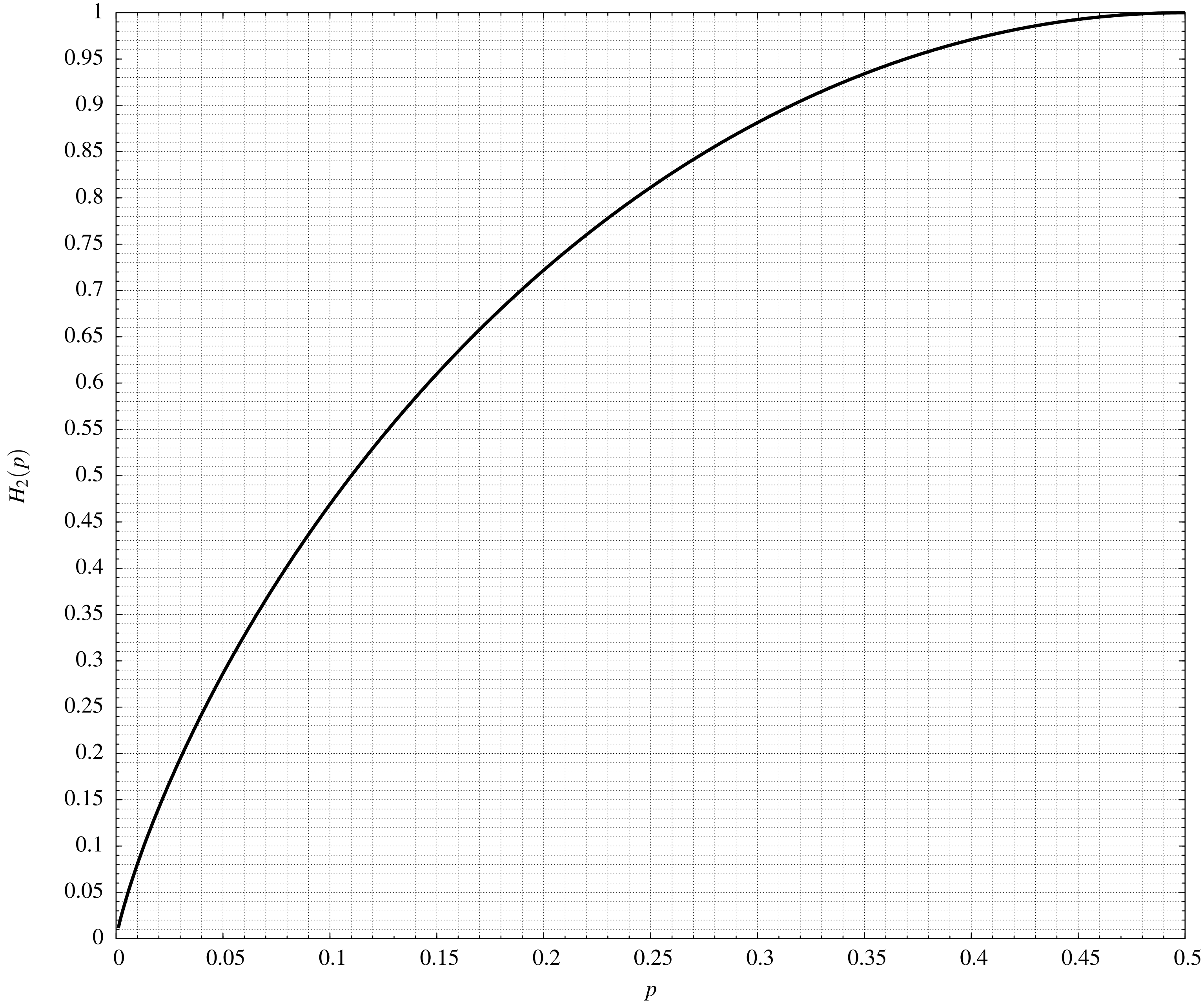
$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{(x_1 * x_2)(t)\} &= X_1(f)X_2(f) \\
\mathscr{F}\{x_1(t)x_2(t)\} &= (X_1 * X_2)(f) \\
\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)X_2^*(f)\,df
\end{aligned}$$

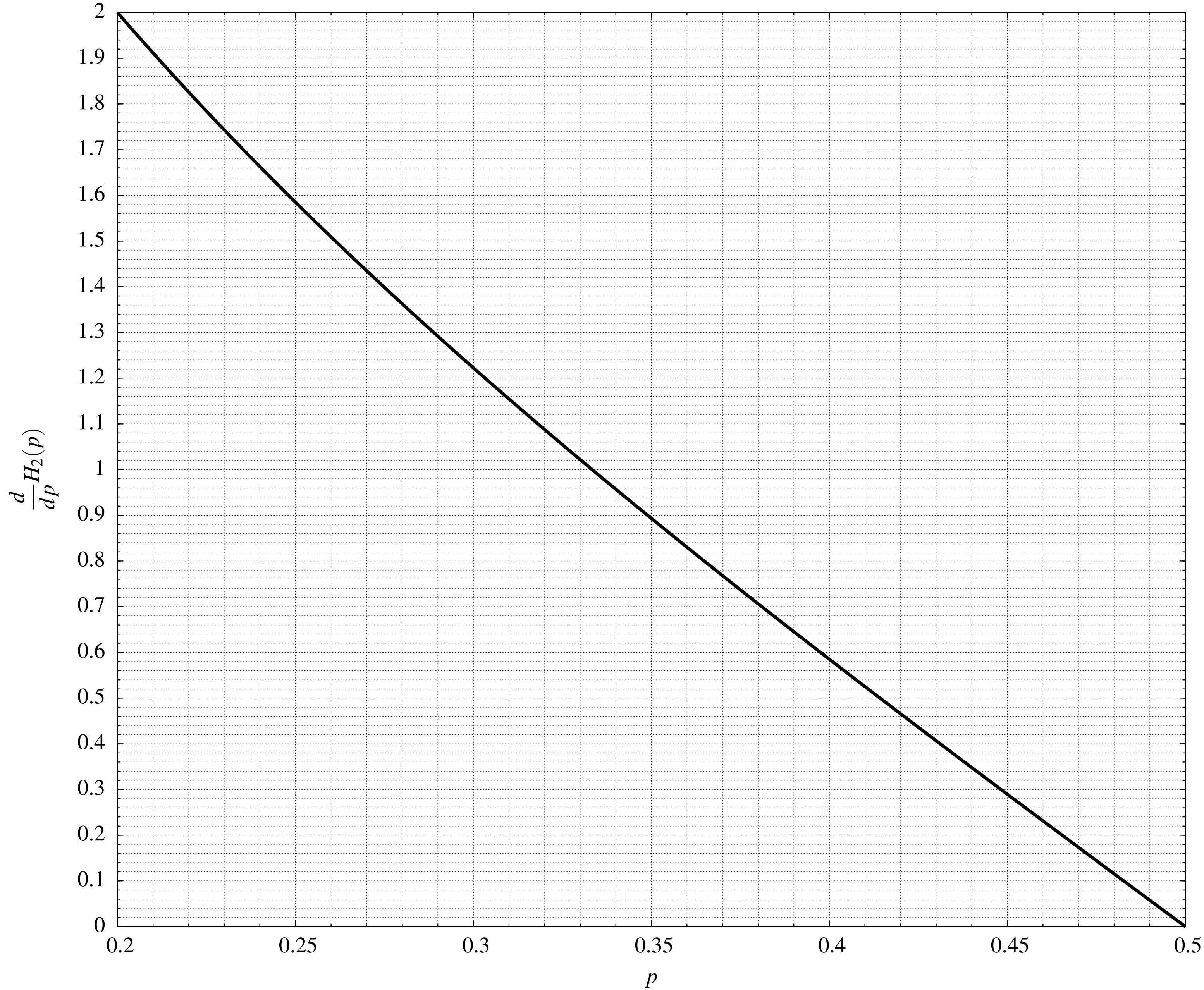
- Some basic transform pairs:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \cos(2\pi f_c t) && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2}(\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)) \\
x(t) &= \sin(2\pi f_c t) && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2j}(\delta(f-f_c)-\delta(f+f_c)) \\
x(t) &= \operatorname{sinc}(t) && \Leftrightarrow \quad X(f) = \begin{cases} 1, & |f| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\
x(t) &= \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \operatorname{sinc}(f) \\
x(t) &= e^{-|t|} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{2}{1+4\pi^2 f^2} \\
x(t) &= \begin{cases} e^{-t}, & t \ge 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} \\
x(t) &= \frac{1}{1+t^2} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \pi e^{-2\pi|f|}
\end{aligned}$$

Some Useful Numerical Approximations

$$\begin{array}{cccc}
2^{1.44} \approx e \approx 2.72 & 2^{1.59} \approx 3 & 2^{2.59} \approx 6 & 2^{6.64} \approx 100 \\
e^{2.3} \approx 10 & \pi^2 \approx 10 & \sqrt{3} \approx 1.73 & 3^{1/3} \approx 1.44
\end{array}$$


$H_2(p)$
p
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75
0.8
0.85
0.9
0.95
1


$\frac{d}{dp}H_2(p)$
2
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
p

Preliminära svar/lösningsförslag

Eventuella synpunkter på rättningen beaktas om de inkommit skriftligen till ISYs studentexpedition innan 2016-08-15.

1. SNR ökar med 6 dB för varje extra bit som används i kvantiseringen.

2. $d_{\text{min}} = 4$ så koden kan rätta ett bitfel. (Den övriga informationen given i uppgiften är irrelevant.)

3. Koherenstiden är längden av ett tidsintervall, under vilket kanalen med god approximation kan betraktas som LTI.

4. Det gäller
$$x(t) = x_I(t)\cos(2\pi f_c t) - x_Q(t)\sin(2\pi f_c t)$$

   (a) För demodulatorn gäller
$$\hat{x}_I(t) = 2\text{LP}\{x(t)\cos(2\pi f_c t)\} = x_I(t)$$
$$\hat{x}_Q(t) = -2\text{LP}\{x(t)\sin(2\pi f_c t + \theta)\} = -x_I(t)\sin(\theta) + x_Q(t)\cos(\theta)$$

   (b) Vi löser ut $x_I(t)$ och $x_Q(t)$:
$$x_I(t) = \hat{x}_I(t)$$
$$x_Q(t) = \frac{\hat{x}_Q(t) + \hat{x}_I(t)\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

   (c) Om $\theta = 0$, så finns ingen obalans. Då gäller
$$x_I(t) = \hat{x}_I(t)$$
$$x_Q(t) = \hat{x}_Q(t)$$
   "som vanligt".

   (d) Algoritmen fungerar för alla θ utom $\theta = \pi/2 + m\pi$ där m är ett heltal, ty då dividerar vi med noll.

5. Låt p vara sannolikheten att vi skickar `1`. Från S.I.C. (7.39),
$$I(y;x) = H_2(0.9p) - pH_2(0.1)$$
   För att beräkna kapaciteten C måste vi maximera $I(y;x)$ med avseende på p. Vi sätter derivatan lika med noll:
$$\frac{d}{dp}I(y;x) = 0.9H_2'(0.9p) - H_2(0.1) = 0$$

Ur den första grafen läser vi ut att $H_2(0.1) \approx 0.47$. Detta ger då

$$H_2'(0.9p) \approx \frac{0.47}{0.9} \approx 0.52$$

vilket ger ur den andra grafen att vi måste ha $0.9p \approx 0.41$, dvs., $p \approx 0.46$. Kapaciteten är således

$$C = \max_p I(y;x) \approx H_2(0.41) - 0.46 \times 0.47 \approx 0.76$$

bpcu.

6. (a) $H(f) = 0$

   (b) Från S.I.C. (9.24),

   $$H(f) = e^{-\sqrt{\frac{R_s}{R_p}}L} e^{-j2\pi f\sqrt{L_s C_p}L}$$

   (c) Från S.I.C. (9.13), med $Z = \infty$,

   $$H(f) = \frac{2}{e^{-\sqrt{ab}L} + e^{\sqrt{ab}L}}$$

   Vi har $Z_c \in \mathbb{R}$, så (9.22) gäller:

   $$\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{R_s}{R_p}} + j2\pi f\sqrt{L_s C_p}$$

   vilket ger

   $$H(f) = \frac{2}{e^{-\sqrt{\frac{R_s}{R_p}}L} e^{-j2\pi f\sqrt{L_s C_p}L} + e^{\sqrt{\frac{R_s}{R_p}}L} e^{j2\pi f\sqrt{L_s C_p}L}} \tag{1}$$

   (d) Första termen i nämnaren i (1) är försumbar om $L \gg \sqrt{R_p/R_s}$. I det fallet,

   $$H(f) \approx 2e^{-\sqrt{\frac{R_s}{R_p}}L} e^{-j2\pi f\sqrt{L_s C_p}L}$$

   vilket är 2 gånger $H(f)$ i (b).

7. (a) Två brus-sampel, $\mathsf{w}[m]$ och $\mathsf{w}[n]$ fås effektivt genom att titta på $\mathsf{w}(t)$ genom filtret $\gamma(t)$ och sampla vid $t = mT_s$ respektive $t = nT_s$. Från S.I.C. (3.4),

   $$E[\mathsf{w}[m]\mathsf{w}[n]] = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\tau - (m-n)T_s)\gamma(\tau)\, d\tau$$

(b) Eftersom Nyquist-kriteriet är uppfyllt, gäller enligt S.I.C. (5.36) att

$$r(nT_s) = \begin{cases} A, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

där

$$r(t) = (h * \gamma * p)(t) = (\gamma * p)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) p(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\tau)\gamma(\tau - t)\, d\tau$$

och

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2(t)\, dt.$$

Så

$$r(nT_s) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\tau - nT_s)\gamma(\tau)\, d\tau.$$

Kombinerar vi detta med uttrycket för $E[\mathsf{w}[m]\mathsf{w}[n]]$ ovan får vi

$$E[\mathsf{w}[m]\mathsf{w}[n]] = \begin{cases} A, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$