LINKÖPINGS UNIVERSITET, INST. FÖR SYSTEMTEKNIK
KOMMUNIKATIONSSYSTEM

TSKS10 Signaler, Information och Kommunikation

Tentamen TEN1, 2014–05–28, kl. 14.00 — 19.00

Skriv ditt ID nummer på varje inlämnat blad, och numrera sidorna. Högst en uppgift per sida. Använd **ej** baksida.

Tentan har två delar: del 1 (teori) och del 2 (problemlösning).
Tentan kan ge maximalt 50 poäng. Preliminära betygsgränser: 3: 25p, 4: 37p, 5: 44p

Motivera noga varje steg i lösningarna. Skriv läsligt och glöm ej att ge ett tydligt svar. Förenkla alla svar så långt som möjligt. Rimlighetskontrollera Dina svar. Orimliga svar ger alltid 0 poäng. Om du gör approximationer, beskriv hur nogranna de är och varför.

Tillåtna hjälpmedel:

- På del 1: inga hjälpmedel
- På del 2:
  - Kursboken *Signals, Information och Communications* av E. G. Larsson
  - Errata till *Signals, Information och Communications*
  - TSKS10 — liten ordlista
  - Tillåtna formelsamlingar: *Tables and formulas for signal theory* (M. Olofsson); *Formler och tabeller* (S. Söderkvist); *Beta Mathematics/Physics Handbook*; *Formelsamling Fourieranalys* (gult häfte); samt signaler-och-system formelsamlingen av L.-I. Alfredsson
- Elektronisk utrustning (miniräknare, dator, etc.) eller egna anteckningar ej tillåtna.

Efter att Du slutfört del 1, lämna in denna till tentamensvakten innan Du tar fram böckerna och börjar med del 2.

Examinator: Erik G. Larsson, ISY, 013-281312, `erik.g.larsson@liu.se`.
Jourhavande lärare: Mikael Olofsson, ISY, 013-281343. Besöker salen kl. 15 och kl. 17.

Kursadministratör: Carina Lindström, 013-284423, `carina@isy.liu.se`.
Visning: 27 juni, 2014, kl 10.00-11.00, på examinators kontor (ing. B29, A-korr, övre plan).
Lösningar till tentan finns på kurshemsidan efter tentamens slut.

Antal uppgifter som ingår i tentamen: 8. Antal sidor (inkl detta försättsblad): 8

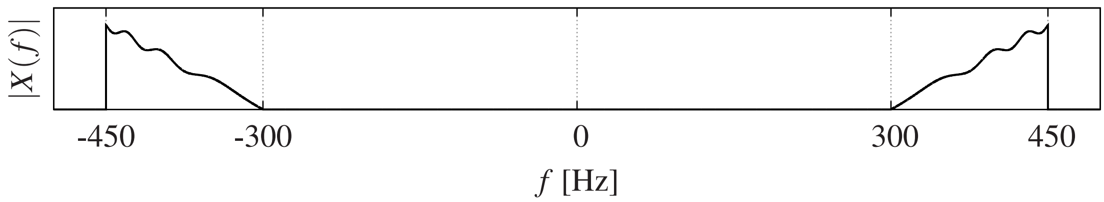
Lycka till!

DEL 1: TEORIFRÅGOR (15p)

1. Definiera fouriertransformen $X[F]$ av en tidsdiskret signal $x[n]$, samt dess invers. (5p)
2. Rita ett blockdiagram över hur I/Q modulation och demodulation fungerar. Du kan anta att modulator och demodulator är perfekt synkroniserade i frekvens och fas. Inkludera alla väsentliga komponenter. (5p)
3. Ge ett enkelt exempel på hur skurlängdskodning ("runlength coding") av en binär sträng fungerar. (5p)

DEL 2: PROBLEMLÖSNING (35p)

4. Betrakta en smalbandig signal $x(t)$ med spektrum som i figuren nedan. Bestäm den minsta samplingsfrekvens f_s som kan användas för att sampla signalen, sådan att $x(t)$ kan rekonstrueras från sina sampel-värden. (6p)



---

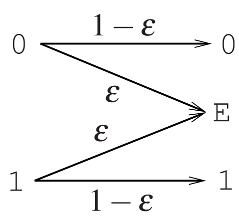
5. Betrakta den symmetriska suddkanalen ("binary erasure channel", BEC), se figuren nedan. Beteckna in-symbolen med $\mathtt{x}$ och ut-symbolen med $\mathtt{y}$.

   (a) Beräkna sannolikheterna $P(\mathtt{y}=\mathtt{0})$ och $P(\mathtt{y}=\mathtt{1})$, uttryckt i $P(\mathtt{x}=\mathtt{1})$. (1p)

   (b) Beräkna ömsesidiga informationen mellan $\mathtt{x}$ och $\mathtt{y}$. (2p)

   (c) Beräkna kanalens kapacitet. (3p)

   (d) Beskriv ett sätt att rimlighetskontrollera svaret i (c). (1p)



---

6. Du arbetar med att konstruera en "akustisk radar" (kallas *sonar*) för användning ombord på en ubåt. Sonarn ska klara avståndsmätning upp till två kilometer, och med en precision på en meter. En enkel algoritm ska klara jobbet, dvs. korrelation och sampling med Nyquist-frekvensen.

   (a) Hur stor bandbredd bör signalen ha (ungefär)? (2p)

   (b) Du använder följande signal

   $$x(t) = \sum_{n=1}^{50} p(t - nT), \qquad p(t) = \mathrm{sinc}^2(t/a).$$

   Skissa mångtydighetsfunktionen (ambiguity function) så gott Du kan. (3p)

   (c) Föreslå ett lämpligt värde på a. Motivera svaret. (2p)

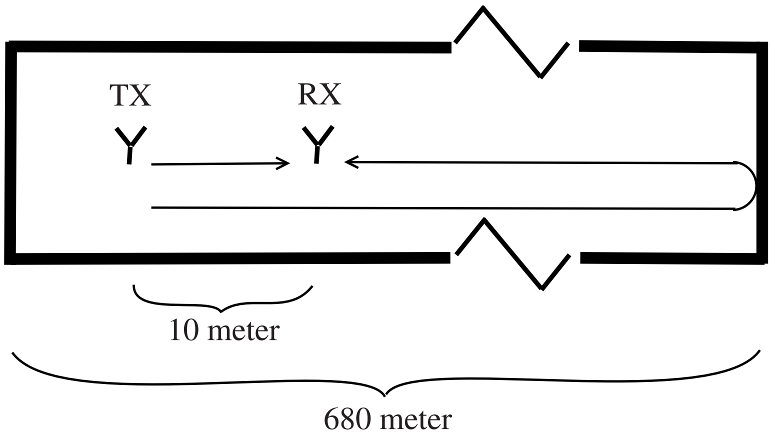
   (d) Föreslå ett lämpligt värde på T, så att oönskade spöktoppar (ghost peaks) med potentiellt stora konsekvenser undviks. Motivera svaret. (3p)

   Du kan anta att signalen breder ut sig med ljudets hastighet i vatten, ca. 1480 m/s.

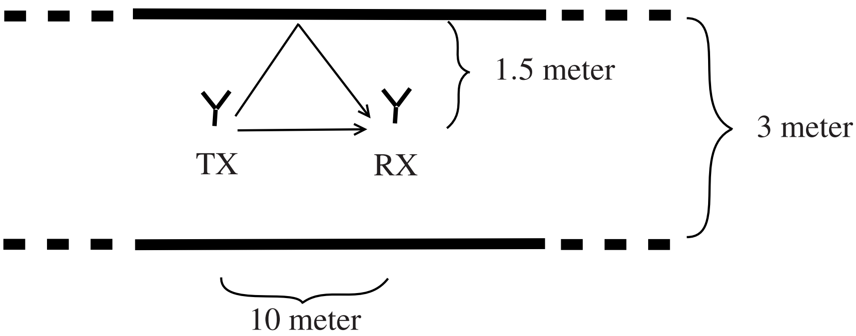
---

7. Mellan A- och B-husen på LiU:s campus går en kulvert (tunnel). Tunnelns längd är ungefär 680 meter och dess tvärsnitt är kvadratiskt med dimensionerna cirka 3 $\times$ 3 meter. Man vill installera ett nätverk för trådlös kommunikation inne i tunneln. Avståndet mellan sändare och mottagare är 10 meter. Bärfrekvensen är $f_c = 6$ GHz. Ingenting rör sig i tunneln.

   (a) Vilken koherensbandbredd kan man förvänta sig att kanalen kommer att ha, om reflektioner från tunnelns ändar förekommer, se enkel två-strålemodell i figuren nedan: (2p)



   (b) Vilken koherensbandbredd kan man förvänta sig att kanalen kommer ha, om endast "en lokal reflektion" förekommer, se enkel två-strålemodell i figuren nedan: (3p)



(Storleksordningar endast. Du kan anta att direktvågen och den reflekterade vågen har samma amplitud.)

---

8. En basstation i ett system för mobilt bredband sänder över en bandbredd om $B = 1$ MHz. Kanalen kan betraktas som en AWGN-vågformskanal.

   (a) Nominellt är basstationens uteffekt inställd så att en mottagare på avståndet 10 km från basstationen tar emot $P = 1.5 \cdot 10^{-13}$ Watt över bandbredden B. Om $T_{\text{eff}} = 700$ Kelvin, vad är kanalens kapacitet i bitar per sekund? (2p)

   (b) Man önskar öka kanalens kapacitet tiofalt jämfört med det nominella fallet utan att öka B. Hur mycket måste man då öka basstationens uteffekt (och därmed P)? Kommentera svaret, är det mycket eller lite? (2p)

   (c) Man önskar öka kanalens kapacitet tiofalt jämfört med det nominella fallet utan att öka P. Hur mycket större bandbredd krävs, d.v.s., hur mycket måste man öka B? (3p)

   Boltzmann's konstant är $k_B \approx 1.4 \cdot 10^{-23}$ Joule/Kelvin.

Some Handy Formulas

Trigonometric Identities

$$
\begin{aligned}
\cos^2(x)+\sin^2(x) &= 1 \\
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y) \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y) \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
\cos(2x) &= \cos^2(x)-\sin^2(x) = 1-2\sin^2(x) = 2\cos^2(x)-1 \\
\sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y)) \\
\sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)) \\
\cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))
\end{aligned}
$$

Fourier Transform

- Suppose $x(t)$ and $X(f)$ constitute a Fourier transform pair,

$$
\begin{aligned}
X(f) &= \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt, \quad \text{and} \\
x(t) &= \mathscr{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,df.
\end{aligned}
$$

Then

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}\{x(-t)\} &= X(-f) \\
\mathscr{F}\{x(at)\} &= \frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right), \qquad a>0 \\
\mathscr{F}\{x(t-T)\} &= e^{-j2\pi fT}X(f) \\
\mathscr{F}\{x(t)\cos(2\pi f_c t)\} &= \frac{1}{2}(X(f-f_c)+X(f+f_c)) \\
\mathscr{F}\{x(t)\sin(2\pi f_c t)\} &= \frac{1}{2j}(X(f-f_c)-X(f+f_c))
\end{aligned}
$$

- If $X_1(f) = \mathscr{F}\{x_1(t)\}$ and $X_2(f) = \mathscr{F}\{x_2(t)\}$ are two Fourier transform pairs, then

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{(x_1 * x_2)(t)\} &= X_1(f)X_2(f) \\
\mathscr{F}\{x_1(t)x_2(t)\} &= (X_1 * X_2)(f) \\
\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)X_2^*(f)\, df
\end{aligned}$$

- Some basic transform pairs:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \cos(2\pi f_c t) && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2}(\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)) \\
x(t) &= \sin(2\pi f_c t) && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2j}(\delta(f-f_c)-\delta(f+f_c)) \\
x(t) &= \mathrm{sinc}(t) && \Leftrightarrow \quad X(f) = \begin{cases} 1, & |f| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\
x(t) &= \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \mathrm{sinc}(f) \\
x(t) &= e^{-|t|} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{2}{1+4\pi^2 f^2} \\
x(t) &= \begin{cases} e^{-t}, & t \ge 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} \\
x(t) &= \frac{1}{1+t^2} && \Leftrightarrow \quad X(f) = \pi e^{-2\pi|f|}
\end{aligned}$$

Some Useful Numerical Approximations

$$\begin{array}{cccc}
2^{1.44} \approx e \approx 2.72 & 2^{1.59} \approx 3 & 2^{2.59} \approx 6 & 2^{6.64} \approx 100 \\
e^{2.3} \approx 10 & \pi^2 \approx 10 & \sqrt{3} \approx 1.73 & 3^{1/3} \approx 1.44
\end{array}$$

Preliminära svar/lösningsförslag

Eventuella synpunkter på rättningen beaktas om de inkommit skriftligen till ISYs studentexpedition innan 2014-08-31.

1. Se t.ex. ekv. (2.1) i S.I.C. (eller signaler-och-system kursen)
2. Se figur 1.10 i S.I.C.
3. Se t.ex. exemplet på sidan 130 i S.I.C., eller U-5.2(a).
4. Detta var uppgift 2-9a i S.I.C. (ingick på le. 2)
5. Detta är uppgift 6-4 i S.I.C., som vi även löste på föreläsning 7.
6. Detta är uppgift 4-1 i S.I.C. (ingick på le. 3) med lite andra siffror. Med samma resonemang som där:

   (a) Bandbredden bör vara i storleksordningen

   $$\frac{1480 \text{ m/s}}{2 \text{ m}} = 740 \text{ kHz}$$

   (b) Mångtydighetsfunktionen är uppritad i figur A-24 i lösningsmanualen till S.I.C. Notera att det finns gott om spöktoppar (avståndet mellan dem är T).

   (c) I frekvensdomänen så är $\mathscr{F}\left\{\text{sinc}^2(t/a)\right\}$ en triangel med stöd i $[-1/a, 1/a]$. Varje enskild puls $\text{sinc}^2(t/a)$ är alltså strikt bandbegränsad till $[-B, B]$ där $B = 1/a$. Detta ger att $x(t)$ också är bandbegränsad till $[-B, B]$.
   Så a bör vara i storleksordningen

   $$\frac{1}{740} \text{ s} \approx 1.35 \text{ ms}$$

   (d) För att undvika att spöktopparna ger oss problem, bör de hamna minst

   $$\frac{4000 \text{ m}}{1480 \text{ m/s}} \approx 2.7 \text{ sekunder}$$

   ifrån varandra. Alltså, tag T (minst) i storleksordningen 2.7 s.

7. (a) Skillnaden i gångväg för de två strålarna i modellen är här “i värsta fall”

   $$2 \cdot 680 \approx 1360 \text{ m.}$$

   Så

   $$B_c = \frac{1}{2 \cdot 1360/c} \approx 110 \text{ kHz}$$

   ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s är ljusets hastighet)

(b) Direktvägen är 10 meter lång. Med en reflektion, enligt Pythagoras sats, är utbredningsvägen

$$2 \cdot \sqrt{5^2 + 1.5^2} = 10\sqrt{1 + 0.3^2} \approx 10 \cdot (1 + 0.09/2) = 10.45$$

meter. Så skillnaden i utbredningsväg är ≈ 45 centimeter. Detta ger[1]

$$B_c = \frac{1}{2 \cdot 0.45/c} \approx 333 \text{ MHz}$$

8. (a) Vi har att $N_0 = k_b T_{\text{eff}} \approx 10^{-20}$ W/Hz. Vi använder (7.60) i S.I.C.

$$C = B \log_2\left(1 + \frac{P}{BN_0}\right) = 10^6 \cdot \log_2(1 + 15) = 4 \cdot 10^6 = 4 \text{ Mb/s}$$

(b) Om Δ är den eftersökta ökningen i effekt så har vi att

$$\log_2(1 + 15\Delta) = 10 \log_2(1 + 15)$$

så

$$\Delta = \frac{2^{40} - 1}{15} \approx \frac{2^{40}}{2^4} = 2^{36}$$

så

$$10 \log_{10}(\Delta) = 36 \cdot 10 \log_{10}(2) \approx 108.$$

Dvs. den ökning i effekt som krävs är 108 dB. Detta är väldigt mycket, om den nominella uteffekten t.ex. är ett par Watt[2] så skulle uteffekten som krävs bli mer än en Gigawatt![3] Det skulle alltså vara omöjligt i praktiken att öka effekten så mycket.

(c) Kapaciteten är

$$B \log_2\left(1 + \frac{P}{10^{-20}B}\right) = B \log_2\left(1 + \frac{1.5 \cdot 10^7}{B}\right).$$

[1] Uppskattningarna här är naturligtvis väldigt grova. Teoretisk modellering av tunnlar är svårt och det är t.ex. svårt att förutsäga till vilken grad reflektioner från tunnelns ändar förekommer överhuvudtaget. Till viss del beror detta på materialet i tunnelns väggar (armerad betong i LiU's tunnel).

Under 2013 tog vi fram experimentella (mät-) resultat som visar att tidsdispersionen T_d i tunneln är i storleksordningen 10 ns. Detta gjordes inom ramen för ett forskningsprojekt, motiverat av behovet av trådlös positionsbestämning och kommunikation nere i gruvor. Så $B_c = 1/T_d$ är i storleksordningen 100 MHz. Detta är lite mindre än uppskattningen i (b) ovan när endast "lokala" reflektioner förekommer men inte så litet som uppskattningen i (a).

Den som är intresserad kan läsa mer om tunneln här: `http://arxiv.org/pdf/1312.6415`

[2] Ett par Watt är i storleksordning vad en LTE-basstation strålar över 1 MHz bandbredd.

[3] 1 GW är i storleksordning vad en kärnreaktor producerar.

Om $B \to \infty$ så har vi att

$$B \log_2 \left(1 + \frac{1.5 \cdot 10^7}{B}\right) \to \log_2(e) \cdot 1.5 \cdot 10^7 \approx 22 \text{ Mb/s}$$

vilket är mindre än 10 gånger svaret i (a). Så det är omöjligt att öka kapaciteten 10 gånger genom att bara öka B.