Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2019-10-28, kl 14.00 -19.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal:

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel utöver skriv och ritverktyg.
Formelblad bifogas.
Vid behov Svensk-Persisk ordbok.

Svar anslås på kurssidan i Lisam efter skrivningstillfället. Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2019-10-28

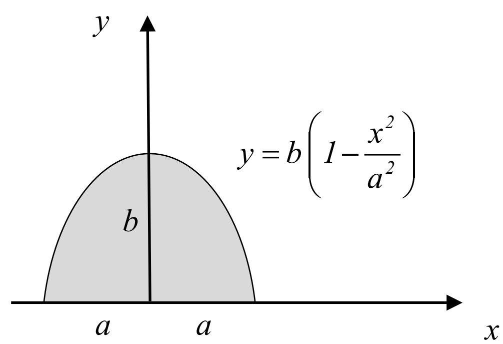
Teoridel:

1a)
Masscentrum för en kropp definieras som bekant enligt nedan:

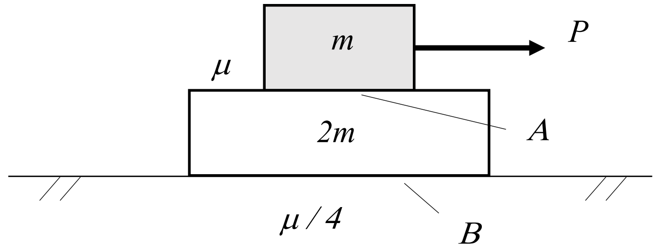
$$\bar{r}_G = \frac{\int_V \bar{r}\rho \, dV}{\int_V \rho \, dV}$$

Betrakta en tunn homogen plåt med konstant tjocklek t och där arean begränsas av kurvan $y = b\,(1 - x^2/a^2\,)$ samt av x-axeln enligt figuren nedan. Visa att masscentrums läge i y-led ges av:

$$y_G = \frac{2}{5}b \qquad \text{(1p)}$$



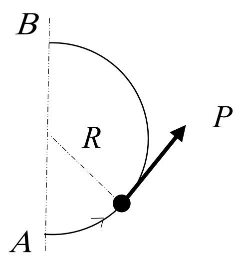
1b)
Två klossar med massan m respektive $2m$ är placerade på varandra. En horisontell kraft P appliceras på den övre massan och kraften ökas sakta från noll uppåt. Utgå från jämvikten samt Coulumbs friktionsvillkor och avgör vilket kontaktställe, A eller B, som uppnår gränsfallet för begynnande glidning först. Den statiska friktionskoefficienten är μ vid A och $\mu / 4$ vid B. (1p)



2)
En partikel rör sig i en cirkelbana då den påverkas av en kraft med konstant storlek P som hela tiden verkar i tangentens riktning, se figuren. Utgå från definitionen av arbete, dvs

$$U = \int_1^2 \overline{P} \circ d\,\overline{r}$$

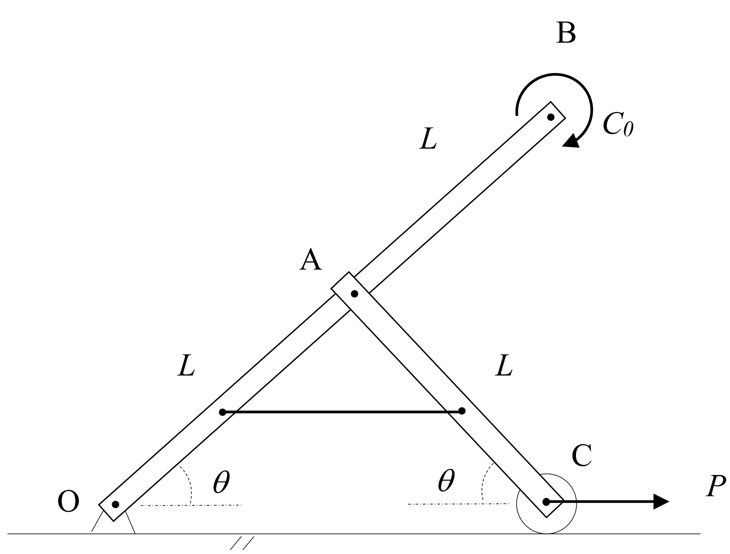
och visa att kraften uträttar arbetet $U = P\,R\,\pi$ om partikeln förflyttas längs halvcirkeln från A till B. (1p)



Problemdel:

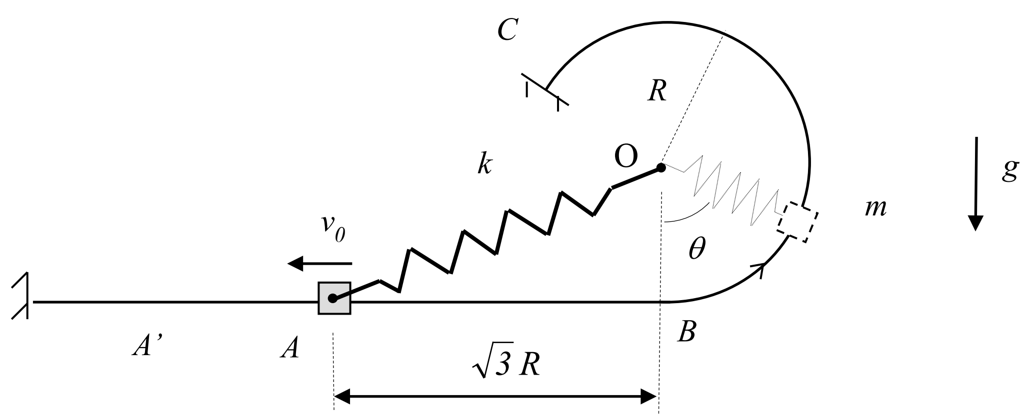
3)
En stång OAB med längden $2L$ och en stång AC med längden L är sammankopplade enligt figuren. Mellan mittpunkterna på sträckan OA och AC är ett horisontellt snöre fäst, se figur. Systemet belastas med ett givet kraftparsmoment $C_0 = PL$ vid B samt en given horisontell kraft P som angriper i rullens mittpunkt vid C. Båda stängerna har lutningsvinkeln θ. Beräkna dragkraften i snöret och normalkraften från underlaget på rullen vid C. Svaret får innehålla de givna storheterna P, L, θ. Delarnas tyngdkrafter samt friktionen i lederna vid O och A samt i rullen C kan försummas.

(3p)



4)
En liten hylsa med massan m kan röra sig längs en stång enligt figur. Hylsan ges en given hastighet v_0 åt vänster vid läge A och rör sig sedan horisontellt och man observerar att hylsan vänder vid läge A' och därefter rör sig åt höger. Vid läge B följer den sedan en cirkulär bana med radien R enligt figur. Beräkna normalkraften på hylsan från stången som funktion av vinkeln θ under den cirkulära delen av banan. Studera intervallet $0 \leq \theta \leq \pi$. Ingen friktion och all rörelse sker i ett och samma vertikalplan. Fjäderkonstanten är $k = 8mg / R$ och fjäderns ospända längd är $L_0 = R / 2$ och $v_0 = \sqrt{2gR}$.

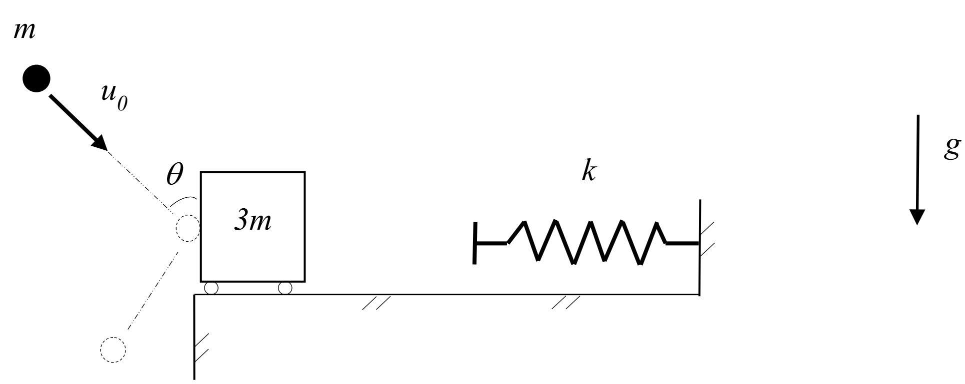
(3p)



5)
En boll med massan m och hastigheten u_0 stöter samman med en stillastående vagn med massan $3m$ enligt figur. Infallsvinkeln är θ mot vertikalen och stöttalet är e mellan vagnen och bollen. Efter stöten rör sig vagnen horisontellt utan friktion och bromsas in med hjälp av en fjäder med fjäderkonstanten k. Kontaktytan mellan bollen och vagnen är glatt och friktionen därimellan kan försummas. Låt θ = 45 grader och stöttalet $e = ½$.

Beräkna

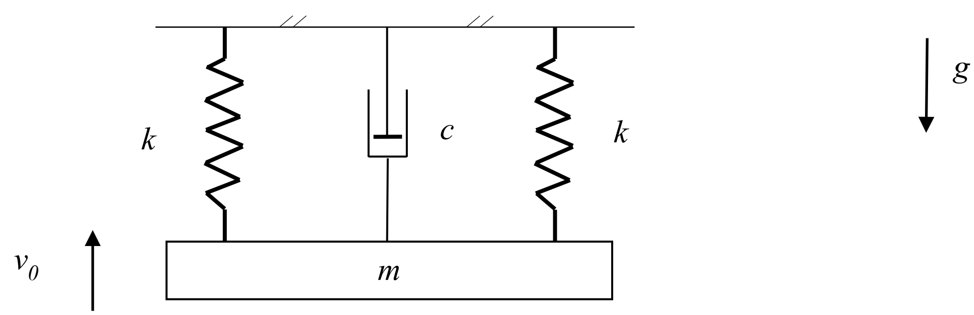
a) Bollens och vagnens respektive hastigheter (bellopet) omedelbart efter stöten. (1p)
b) Stötimpulsen från vagnen på bollen vid stöten. (1p)
c) Fjäderns maximala ihoptryckning när vagnen bromsas in efter stöten. (1p)



6)
Ett dämpsystem för att dämpa ut en vertikal rörelse för en platta med massan m består av två fjädrar och en dämpare enligt figur. Fjädrarna har fjäderkonstanten k vardera och dämparen har dämpkonstanten c. Fjädrarna har ospända längden L_0. Massan startas genom att den ges en hastighet v_0 riktad uppåt då respektive fjäder har längden $L_0 + mg / 2k$. Beräkna hur stor hastigheten v_0 maximalt får vara om fjädrarnas längd inte får understiga värdet $L_0 / 2$ för den efterföljande rörelsen.

Låt parametern c vara $c = 2\sqrt{2km}$ vid beräkningen.

(3p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\overline{v} = \dot{s}\bar{\boldsymbol{e}}_t$$

$$\overline{a} = \ddot{s}\bar{\boldsymbol{e}}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{\boldsymbol{e}}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\overline{v} = \dot{r}\bar{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\theta}\bar{\boldsymbol{e}}_\theta$$

$$\overline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{\boldsymbol{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{\boldsymbol{e}}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \overline{F} = m\overline{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \overline{F} \cdot d\overline{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \overline{F}\, dt = \overline{G}_2 - \overline{G}_1, \qquad \overline{G} = m\overline{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{M}_o dt = \overline{H}_{o2} - \overline{H}_{o1}, \qquad \overline{H}_o = \overline{r} \times m\overline{v}$$

$$\overline{M}_o = \overline{r} \times \sum \overline{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

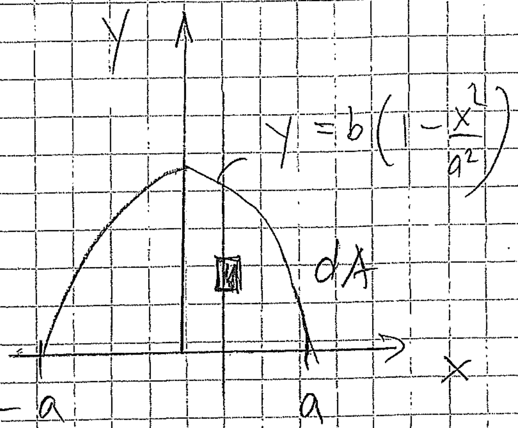
Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1a)

$$dV = t\,dA \qquad \rho, t = \text{konst.}$$



$$y_G = \frac{\int_V y \rho \, dV}{\int_V \rho \, dV} = \frac{\rho t \int_A y\,dA}{\rho t \int_A dA}$$

$$y_G = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA} \; ; \quad dA = dx\,dy$$

$$\int_A y\,dA = \int_A y\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\left[\int_0^{b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} y\,dy\right]dx =$$

$$= \int_{-a}^{a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} dx = \int_{-a}^{a}\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2 dx$$

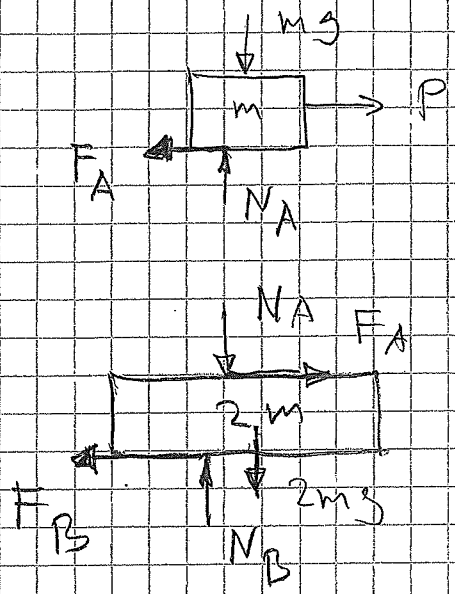
$$= \int_{-a}^{a}\frac{b^2}{2}\left(1+\frac{x^4}{a^4}-\frac{2x^2}{a^2}\right)dx = \frac{8}{15}ab^2 \quad //$$

$$\int_A dA = \int_A dx\,dy = \int_{-a}^{a}\left[\int_0^{b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} dy\right]dx =$$

$$= \int_{-a}^{a} b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{3}ab \quad //$$

$$y_G = \frac{\frac{8}{15}ab^2}{\frac{4}{3}ab} = \frac{2}{5}b \qquad \text{V.S.V} \qquad //$$

1b) Frilägg delarna



Jämvikten: $\rightarrow \quad P - F_A = 0$

$\uparrow \quad N_A - mg = 0$

$\rightarrow \quad F_A - F_B = 0$

$\uparrow \quad N_B - N_A - 2mg = 0$

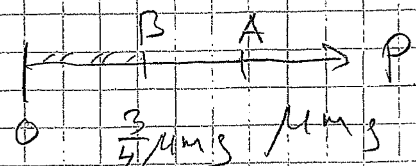
Ger $\begin{cases} F_A = P \\ N_A = mg \end{cases}$; $\begin{cases} F_B = P \\ N_B = 3mg \end{cases}$

Friktionsvillkor: $|F_A| \le \mu |N_A|$; $N_A \geq 0$

$|F_B| \le \frac{\mu}{4} |N_B|$; $N_B \geq 0$

Ger $P \le \mu m g \quad \boxed{A}$

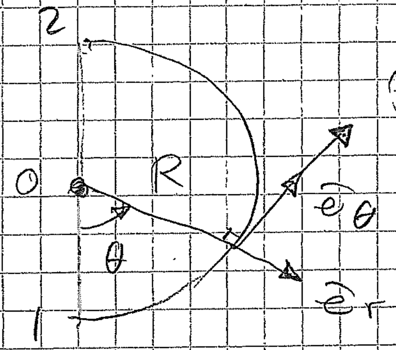
$P \le \frac{3}{4} \mu m g \quad \boxed{B}$



Gränsfallet uppnås vid B först.

Cirkelbana $r = R = \text{konst}, \; \dot{r} = 0$

2)



$\bar{V} = R\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta$

$$\bar{P} = P\,\bar{e}_\theta \;, \quad d\bar{r} = \frac{d\bar{r}}{dt}dt = \bar{V}dt = R\dot{\theta}dt\,\bar{e}_\theta =$$

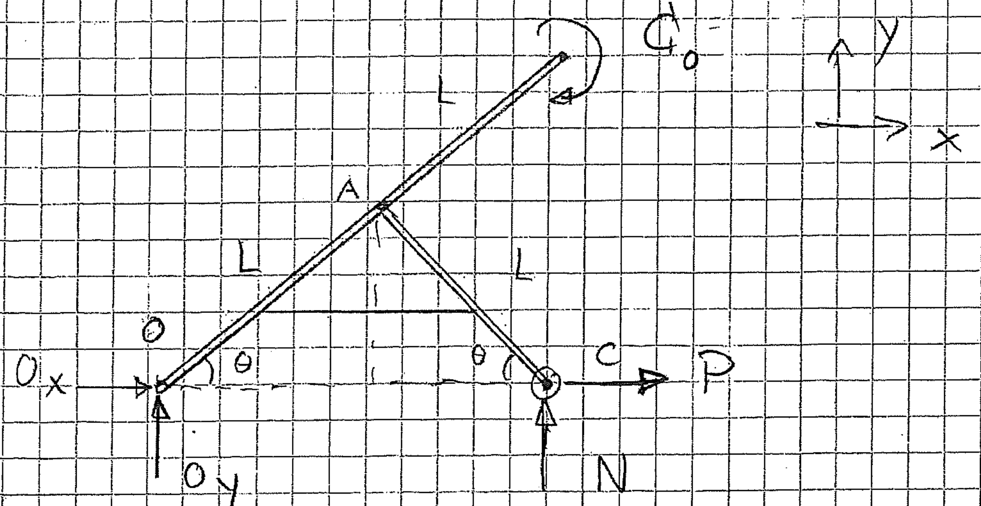
$$= R\,d\theta\,\bar{e}_\theta$$

$$U = \int_1^2 \bar{P} \circ d\bar{r} = \int_1^2 P\bar{e}_\theta \circ R\,d\theta\,\bar{e}_\theta = \int_0^\pi PR\,d\theta$$

ty $\bar{e}_\theta \circ \bar{e}_\theta = 1.$

Dvs $U = PR\left[\theta\right]_0^\pi = PR\pi$ V.S.V. //

3) Frilägg hela systemet

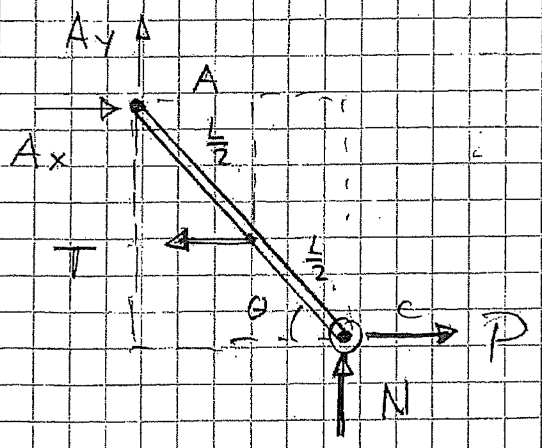


$\Sigma F_x = 0 \quad \rightarrow \quad O_x + P = 0 \qquad (1)$

$\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow \quad O_y + N = 0 \qquad (2)$

$\Sigma M_z = 0 \quad (O) \quad N \cdot 2L\cos\theta - G_0 = 0 \qquad (3)$

Frilägg delen AC



$\Sigma F_x = 0 \quad \rightarrow \quad A_x - T + P = 0 \qquad (4)$

$\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow \quad N + A_y = 0 \qquad (5)$

$\Sigma M_z = 0 \quad (A) \quad N\, L\cos\theta + P \cdot L\sin\theta - T\,\frac{L}{2}\sin\theta = 0 \qquad (6)$

(3), (6) ger med $G_0 = PL$; $N = \dfrac{P}{2\cos\theta}$ //

$T = P\left(2 + \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$ // $N \geq 0,\ T \geq 0$ ok

3) Sàledas:

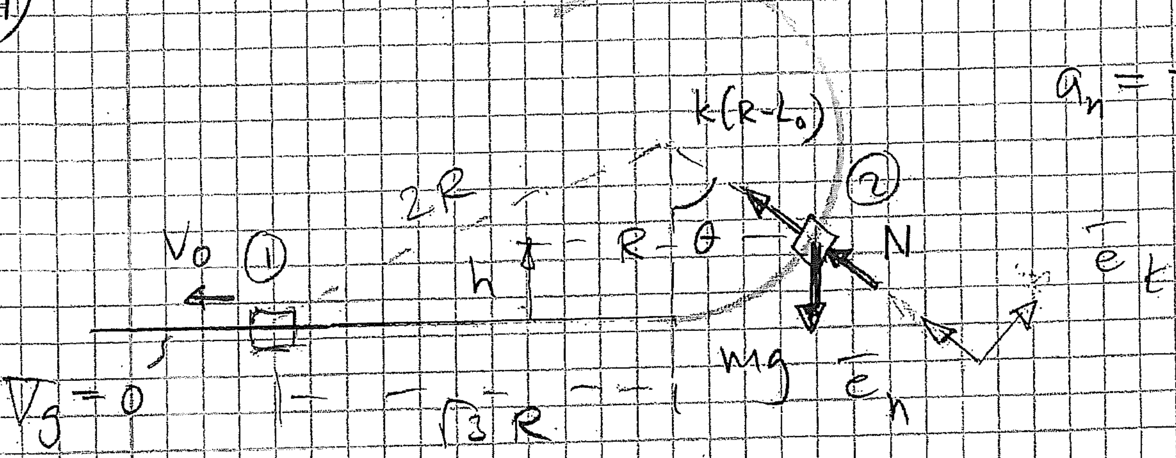
$$T = P\left(2 + \frac{1}{\sin\theta}\right)$$

$$N = \frac{P}{2\cos\theta}$$

4)

Frilägg

$$a_n = \frac{V^2}{R}$$



$$\Sigma \bar{F} = m a \text{ ger } \bar{e}_n: \quad N + k(R - L_0) - mg\cos\theta = m\frac{V^2}{R} \quad (1)$$

(1) ger med $k = 8mg/R$, $L_0 = \frac{R}{2}$

$$N(\theta) = mg\cos\theta - 4mg + m\frac{V^2}{R} \quad (2)$$

Bestäm $V(\theta)$ mha $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$$0 = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 + mgh + \frac{1}{2}k(R - L_0)^2 - \frac{1}{2}k(2R - L_0)^2$$

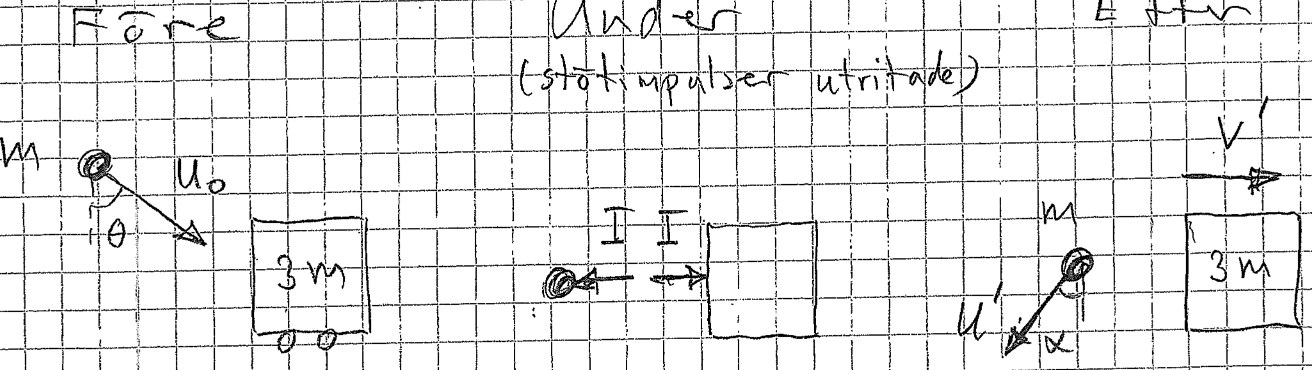
där $L_0 = \frac{R}{2}$, $h = R - R\cos\theta$, $k = \frac{8mg}{R}$,

$V_0 = \sqrt{2gR}$

ger $V^2(\theta) = 16gR + 2gR\cos\theta$

ins. i (2) ger $N(\theta) = mg(12 + 3\cos\theta)$ //

5) Studera stöten först.



$\bar{I}_S = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$ ger för systemet

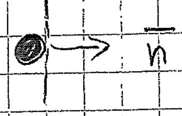
$$\rightarrow \quad 0 = 3mv' - mu'\sin\alpha - mu_0\sin\theta \qquad (1)$$

$\bar{I}_S = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$ för bollen

$$\rightarrow \quad -I = m(-u'\sin\alpha) - mu_0\sin\theta \qquad (2)$$

$$\downarrow \quad 0 = mu'\cos\alpha - mu_0\cos\theta \qquad (3)$$

Stöttalet (bollen = 1, vagnen = 2)



$$e = \frac{v'_{2n} - v'_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}} = \frac{v' - (-u'\sin\alpha)}{u_0\sin\theta - 0} = \frac{1}{2} \qquad (4)$$

Alt: $$e = \frac{(\bar{v}'_2 - \bar{v}'_1)\circ\bar{n}}{(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)\circ\bar{n}}$$

(1), (4) ger

$$3v' - u' \sin\alpha = u_0 \sin\theta$$

$$v' + u' \sin\alpha = \frac{1}{2} u_0 \sin\theta$$

ger $v' = \frac{3}{8} u_0 \sin\theta$ //

och $u' \sin\alpha = \frac{1}{8} u_0 \sin\theta$ men (3) ger

$$u' \cos\alpha = u_0 \cos\theta$$

Dvs $u'^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 u_0^2 \sin^2\theta + u_0^2 \cos^2\theta$

$$u' = u_0 \sqrt{\frac{1}{64}\sin^2\theta + \cos^2\theta} \quad //$$

Med $\theta = 45°$ fås $v' = \frac{3}{8\sqrt{2}} u_0 = \frac{3\sqrt{2}}{16} u_0$ //

$$u' = \frac{\sqrt{65}}{8\sqrt{2}} u_0 = \frac{\sqrt{130}}{16} u_0 \quad //$$

(2) ger $I = m u' \sin\alpha + m u_0 \sin\theta$

$$I = \frac{9}{8} m u_0 \sin\theta \quad , \quad \theta = 45°$$

$$I = \frac{9}{8\sqrt{2}} m u_0 = \frac{9\sqrt{2}}{16} m u_0 \quad //$$

Efter stöten till max deformation

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \quad \text{ger}$$

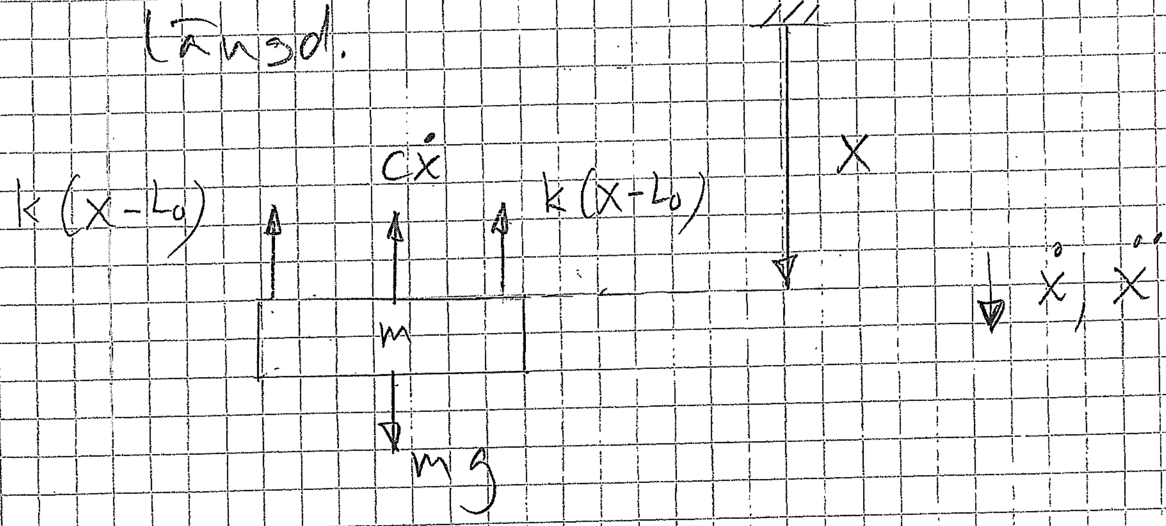
$$0 = 0 - \frac{1}{2} 3m v'^2 + \frac{1}{2} k \delta_{max}^2$$

($v'' = 0$ vid max deformation, vändläge)

$$\text{ger} \quad \delta_{max}^2 = \frac{3m}{k} v'^2 = \frac{3m}{k} \cdot \frac{9}{64} \cdot \frac{1}{2} u_0^2$$

$$\delta_{max} = \frac{3}{16} \sqrt{\frac{6m}{k}}\, u_0 \quad //$$

6) Frilägg, låt x mäta fjäderns längd.



$\sum \bar{F} = m\bar{a}$ $\downarrow$ $mg - 2k(x - L_0) - c\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = g + \frac{2k}{m}L_0 \quad (1)$$

Ident. med $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$

$\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n$, $\frac{2k}{m} = \omega_n^2$, $g + \frac{2k}{m}L_0 = \omega_n^2 x_1$

med $c = 2\sqrt{2km}$ fås $\zeta = 1$, $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$,

$x_1 = \frac{mg}{2k} + L_0$, dvs (1) har lösn.

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_n t} + \frac{mg}{2k} + L_0$$

B.V. $x(0) = L_0 + \frac{mg}{2k}$ ger $A = 0$

$\dot{x}(0) = -V_0$ ger $B = -V_0$

Dvs $\quad x(t) = -V_0 t\, e^{-\omega_n t} + \frac{mg}{2k} + L_0 \quad (2)$

Villkor $\quad x(t) \geq \frac{L_0}{2} \quad \forall t$;

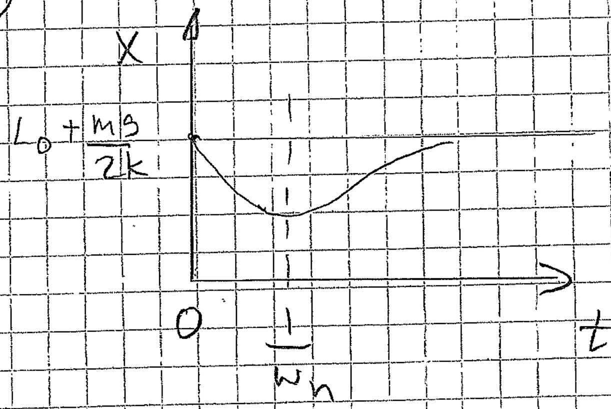
Mest kritiskt är det vid vändläget då $\dot{x} = 0$ (dvs då $x(t)$ är min)

Från (2) fås

$$\dot{x}(t) = -V_0 e^{-\omega_n t} + (-V_0 \cdot t) \cdot (-\omega_n) e^{-\omega_n t}$$

$$\dot{x}(t) = V_0 (\omega_n t - 1) e^{-\omega_n t}$$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$



$\dot{x} = 0$ då $t = \frac{1}{\omega_n}$

ins. i (2) ger

$$x_{min} = x\left(\frac{1}{\omega_n}\right) = -V_0 \frac{1}{\omega_n} e^{-1} + \frac{mg}{2k} + L_0 \geq \frac{L_0}{2}$$

Dvs $\quad V_0 \leq \frac{\omega_n e}{2} \left(\frac{mg}{k} + L_0 \right)$, $\quad \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$$V_{0,max} = \sqrt{\frac{k}{2m}} \left(\frac{mg}{k} + L_0 \right) e \quad //$$