Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2019-08-26, kl 14.00 -19.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: TERE, TER3

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel utöver skriv och ritverktyg.
Formelblad bifogas.
Vid behov Svensk-Persisk ordbok.

Svar anslås på kurssidan i Lisam efter skrivningstillfället. Tentan lämnas efter rättning till Studerande-expeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 8

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27, 2019-08-26

Teoridel:

1)
Masscentrum definieras som bekant enligt

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\int_V \boldsymbol{r}\,\rho dV}{\int_V \rho dV}$$

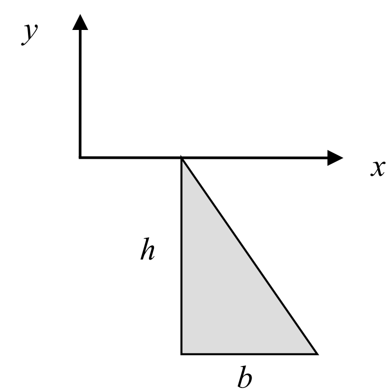
Utgå från denna definition och visa att masscentrums läge i y-led ges av

$$y_G = -\frac{2h}{3}$$

För en tunn homogen plåt i form av en triangel med basen b och höjden h enligt figur.

(1p)

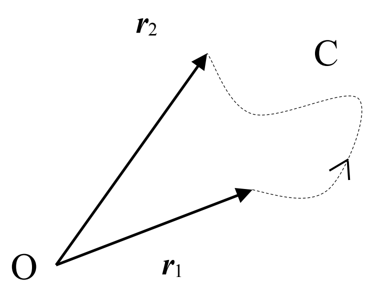
Tjockleken = konstant



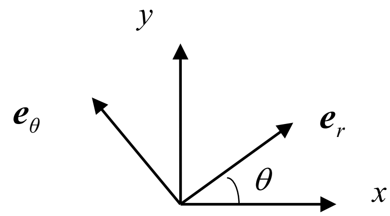
2a)
Utgå från definitionen av en krafts arbete som uträttas vid en förflyttning från läget $\boldsymbol{r}_1$ till läget $\boldsymbol{r}_2$ längs en kurva C

$$U = \int_{\boldsymbol{r}_1, C}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{r}$$

och visa att tyngdkraftens uträttade arbete är oberoende av vägen mellan $\boldsymbol{r}_1$ och $\boldsymbol{r}_2$. (1p)



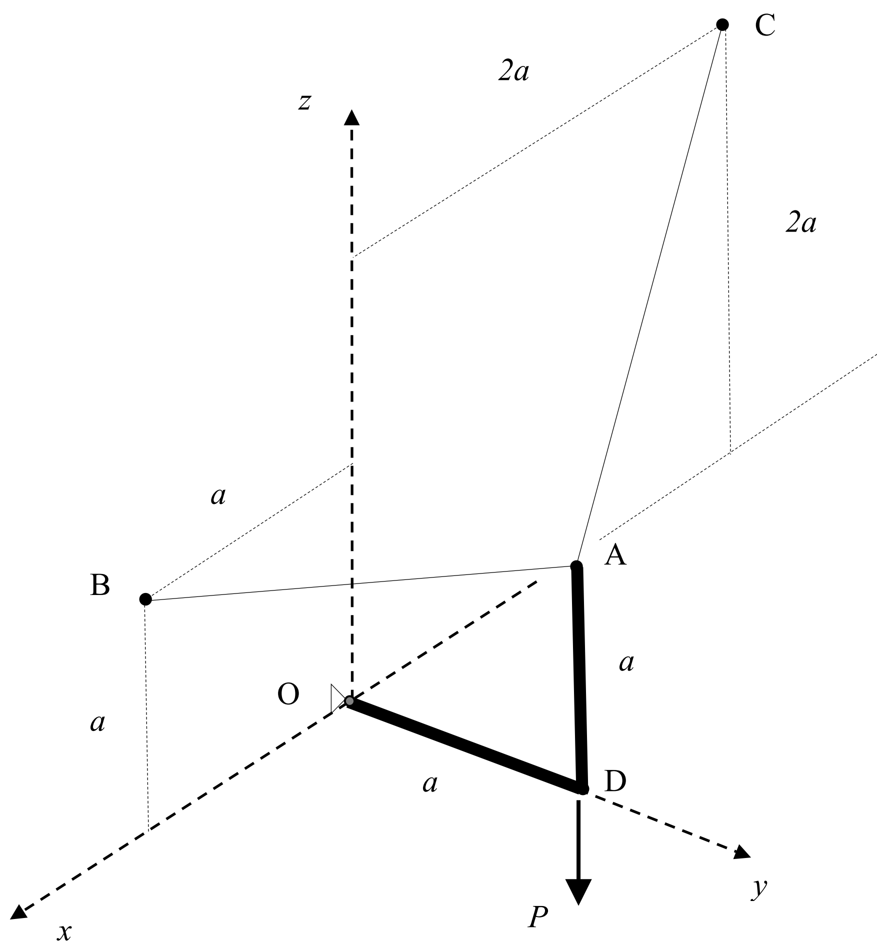
2b)
Givet de polära enhetsvektorerna $\boldsymbol{e}_r$ och $\boldsymbol{e}_\theta$. Visa att deras tidsderivator $\dot{\boldsymbol{e}}_r$ och $\dot{\boldsymbol{e}}_\theta$ kan skrivas som $\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta$ och $\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_r$. Systemet *xy* är fixt. (1p)



Problemdel:

3)
En kropp ODA består av två sammansvetsade stela stänger med längden *a* vardera. Vinkeln vid D är rät och kroppen befinner sig i jämvikt i *yz*-planet enligt figur. Kroppen är lagrad vid O med en friktionsfri kulled. Vid A är två snören AB och AC fästa och dessa är sedan fixerade vid B respektive C i *xz*-planet. Kroppen belastas med en last *P* i negativa *z*-riktningen vid D. Beräkna storleken av dragkraften i snörena AB och AC. Geometri enligt figuren där OD ligger längs *y*-axeln. Kroppens massa kan försummas.

(3p)



4)
En partikel med massan m kan friktionsfritt röra sig i ett halvcirkulärt spår med radien R. I partikeln är ett snöre fäst enligt figuren. Man drar i snöret horisontellt med en hastighet vars belopp (farten) är v och som ökar linjärt i tiden enligt sambandet

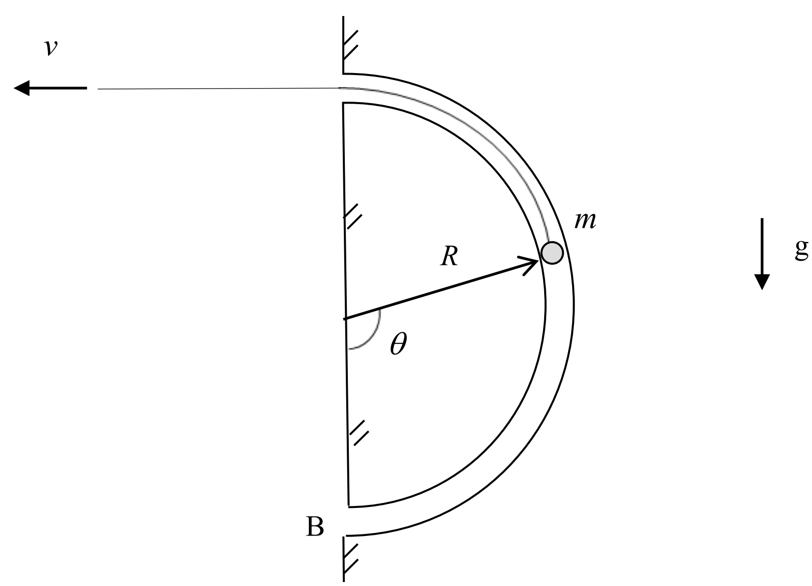
$$v = \frac{1}{3} g\, t$$

Partikeln startar vid B från vila vid tiden $t = 0$ då vinkeln $\theta = 0$. Studera intervallet

$$0 \le \theta \le \pi$$

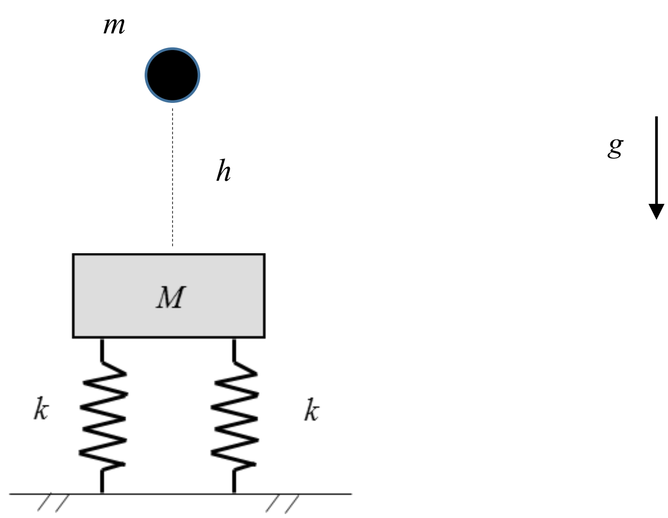
All rörelse sker i ett och samma vertikalplan.

Beräkna:
a) Vinkeln θ som funktion av tiden t (1p)
b) Normalkraften från spåret på partikeln som funktion av vinkeln θ (1p)
c) Dragkraften i snöret som funktion av vinkeln θ (1p)



5)
En platta med massan M är placerad på två fjädrar med fjäderkonstanten k vardera. Plattan befinner sig i vila i sitt statiska jämviktsläge när den träffas av en boll som från vila fallit höjden h enligt figur. Bollens massa är m och bollen fastnar i platten efter stöten. Låt $M = 2m$ och beräkna

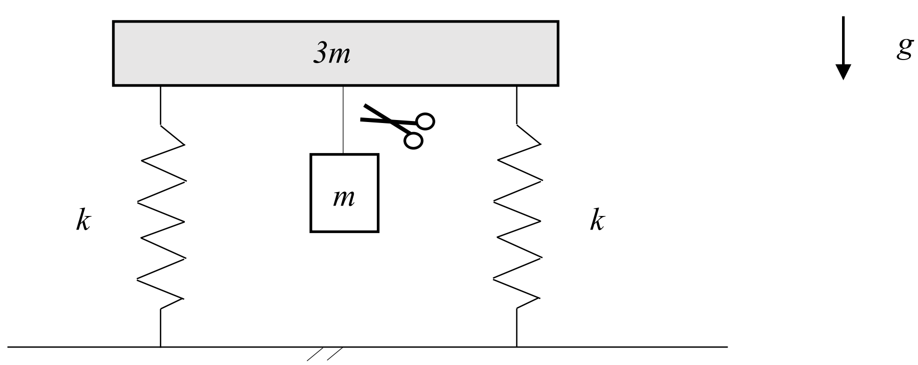
a) hastigheten omedelbart efter stöten (1p)
b) stötimpulsen från plattan på bollen vid stöten. (1p)
c) hastigheten när fjädrarna tryckts ihop sträckan $\delta = 2mg / k$ från jämviktsläget (1p)



6)
En platta med massan $3m$ är placerad på två fjädrar med fjäderkonstanten k vardera. En vikt med massan m är via ett snöre fäst i plattan enligt figur. Systemet befinner sig från början i vila i sitt statiska jämviktsläge. Vid tiden $t = 0$ klipps snöret av och massan $3m$ börjar därefter att svänga vertikalt.

a) Beräkna fjädrarnas längd som funktion av tiden t för den efterföljande rörelsen. Låt den ospända längden vara L_0 för fjädrarna. (2p)

b) Efter hur lång tid efter starten når massan $3m$ sitt övre vändläge ? (1p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$
$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$
$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

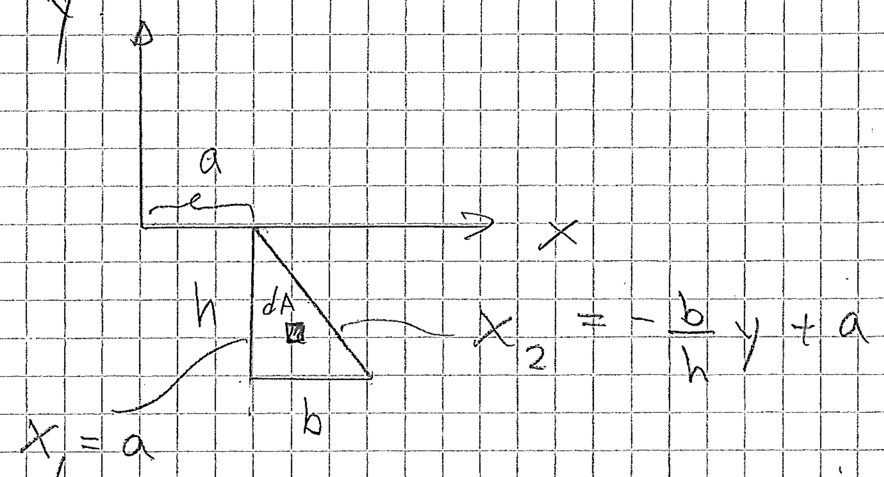
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1)



$$Y_G = \frac{\int_V y \rho \, dV}{\int_V \rho \, dV} \; ; \quad dV = t \cdot dA \; , \quad dA = dx\,dy$$

$$\rho, t = \text{konst.}$$

$$Y_G = \frac{\int_A y \rho t \, dA}{\int_A \rho t \, dA} = \frac{\int_A y \, dA}{\int_A dA}$$

$$\int_A y \, dA = \int_A y \, dx\,dy = \int_{-h}^{0} \left[\int_{a}^{-\frac{b}{h}y+a} dx \right] y \, dy$$

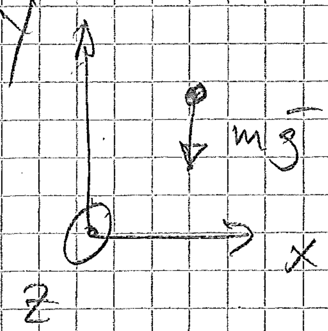
$$= \int_{-h}^{0} \left[x \right]_{a}^{-\frac{b}{h}y+a} y \, dy = \int_{-h}^{0} -\frac{b}{h} y^2 \, dy$$

$$= -\frac{b}{h} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h}^{0} = -\frac{bh^2}{3} \quad //$$

$$\int_A dA = \int_A dx\,dy = \int_{-h}^{0} \left[\int_{a}^{-\frac{b}{h}y+a} dx \right] dy = \int_{-h}^{0} -\frac{b}{h} y \, dy$$

$$= bh/2 \quad // \quad , \quad Y_G = -\frac{bh^2}{3} \Big/ \frac{bh}{2} = -\frac{2h}{3} \quad //$$

2a) $$U = \int_{\bar r_1,\,G}^{\bar r_2} \bar F \circ d\bar r$$



$$\begin{cases} \bar F = -mg\,\bar e_y \\ d\bar r = dx\,\bar e_x + dy\,\bar e_y + dz\,\bar e_z \end{cases}$$

$$\bar F \circ d\bar r = -mg\,\bar e_y \circ (dx\,\bar e_x + dy\,\bar e_y + dz\,\bar e_z)$$
$$= -mg\,dy$$

ty $\bar e_y \circ \bar e_x = 0$, $\bar e_y \circ \bar e_y = 1$,

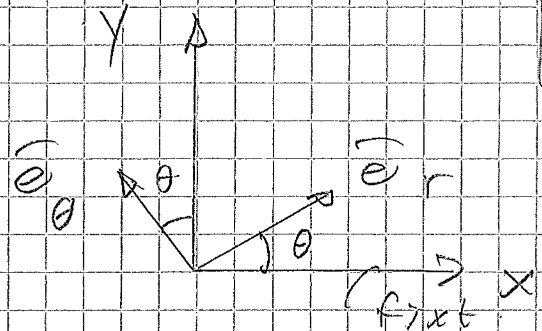
$\bar e_y \circ \bar e_z = 0$

Dvs $U = \int_{y_1}^{y_2} -mg\,dy = -mg(y_2 - y_1)$

Beror enbart av start och slutläget y_1 och y_2.

Dvs oberoende av vägen G.

2b



$$|\bar{e}_r| = |\bar{e}_\theta| = 1$$

$$\bar{e}_r = \cos\theta\,\bar{e}_x + \sin\theta\,\bar{e}_y \qquad (1)$$

$$\bar{e}_\theta = -\sin\theta\,\bar{e}_x + \cos\theta\,\bar{e}_y \qquad (2)$$

$\bar{e}_x, \bar{e}_y$ är konstanta i tiden (xy - fixt). Derivera (1), (2) i tiden

$$\dot{\bar{e}}_r = -\sin\theta\cdot\dot{\theta}\,\bar{e}_x + \cos\theta\cdot\dot{\theta}\,\bar{e}_y$$

$$\dot{\bar{e}}_\theta = -\cos\theta\cdot\dot{\theta}\,\bar{e}_x - \sin\theta\cdot\dot{\theta}\,\bar{e}_y$$

Men via (1), (2) igen fås

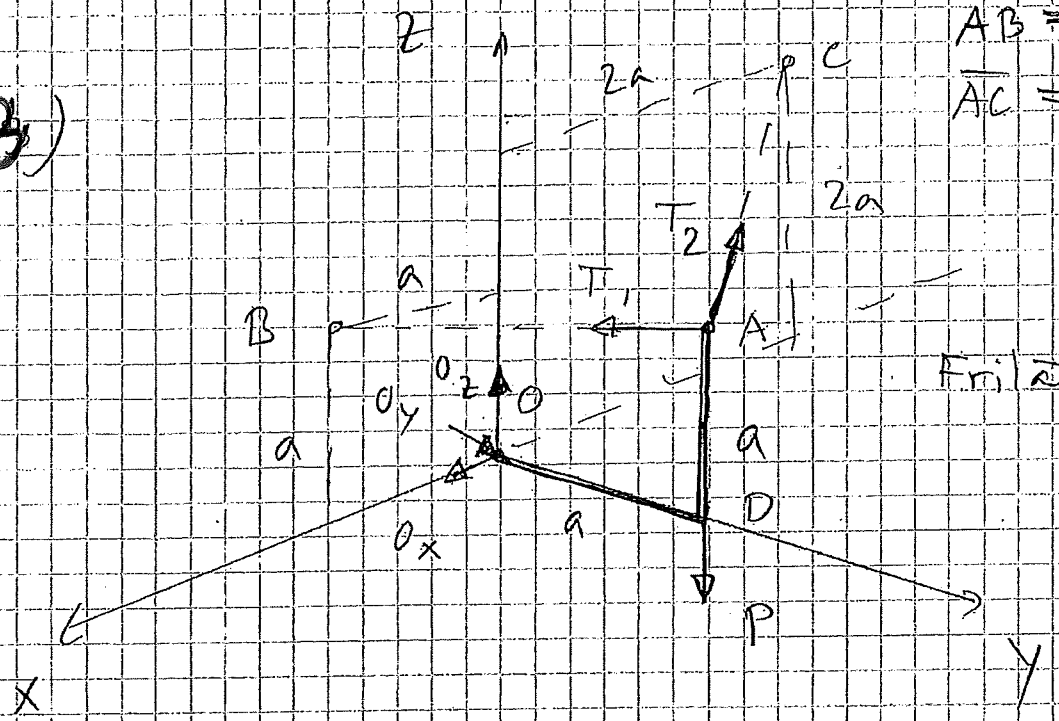
$$\dot{\bar{e}}_r = \dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\bar{e}_x + \cos\theta\,\bar{e}_y\right) = \dot{\theta}\,\bar{e}_\theta$$

$$\dot{\bar{e}}_\theta = -\dot{\theta}\left(\cos\theta\,\bar{e}_x + \sin\theta\,\bar{e}_y\right) = -\dot{\theta}\,\bar{e}_r$$

Dvs $\dot{\bar{e}}_r = \dot{\theta}\,\bar{e}_\theta$, $\dot{\bar{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\bar{e}_r$

V.S.V.

3)



$\overline{AB} = a(\bar{e}_x - \bar{e}_y)$

$\overline{AC} = a(-2\bar{e}_x - \bar{e}_y + \bar{e}_z)$

Frilägg

$$\overline{T}_1 = T_1 \bar{e}_{AB} = T_1 \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = T_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{e}_x - \bar{e}_y)$$

$$\overline{T}_2 = T_2 \bar{e}_{AC} = T_2 \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} = T_2 \frac{1}{\sqrt{6}} (-2\bar{e}_x - \bar{e}_y + \bar{e}_z)$$

$\overline{M}^0 = \bar{0}$ ger

$$\overline{OA} \times \overline{T}_1 + \overline{OA} \times \overline{T}_2 + \overline{OD} \times \overline{P} = \bar{0} \quad (1)$$

där $\overline{OA} = a\bar{e}_y + a\bar{e}_z$

$\overline{OD} = a\bar{e}_y$

$\overline{P} = -P\bar{e}_z$

(1) ger

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & a & a \\ \frac{T_1}{\sqrt{2}} & -\frac{T_1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & a & a \\ -\frac{2T_2}{\sqrt{6}} & -\frac{T_2}{\sqrt{6}} & \frac{T_2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix} = \bar{0}$$

$$\left(\frac{aT_1}{\sqrt{2}} + a\frac{2T_2}{\sqrt{6}} - P \cdot a\right)\bar{e}_x + \left(\frac{aT_1}{\sqrt{2}} - \frac{2aT_2}{\sqrt{6}}\right)\bar{e}_y$$

$$+ \left(-\frac{T_1}{\sqrt{2}}a + \frac{2T_2}{\sqrt{6}}a\right)\bar{e}_z = \bar{0}$$

x: led $\frac{aT_1}{\sqrt{2}} + a\frac{2T_2}{\sqrt{6}} - Pa = 0$ (2)

y: led $\frac{aT_1}{\sqrt{2}} - \frac{2aT_2}{\sqrt{6}} = 0$ (3)

[z: led $-\frac{T_1}{\sqrt{2}}a + \frac{2T_2}{\sqrt{6}}a = 0$ (4)]

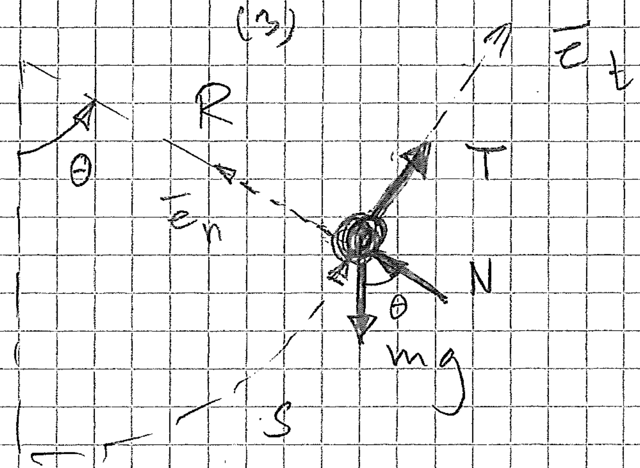
(2), (3) ger $\underline{\underline{T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}P}}$, $\underline{\underline{T_2 = \frac{\sqrt{6}}{4}P}}$

4) Frilägg partikeln

Kinematik ($s = R\theta$, $\rho = R$ cirkelbana)

$$V = \dot{s} = R\dot{\theta} = \frac{1}{3} g t \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_t = \ddot{s} = \dot{V} = \frac{1}{3} g & (2) \\ a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{V^2}{R} & (3) \end{cases}$$



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\bar{e}_t \nearrow \quad -mg\sin\theta + T = m a_t \qquad (4)$

$\bar{e}_n \nwarrow \quad N - mg\cos\theta = m a_n \qquad (5)$

(1) ger $\dot{\theta} = \frac{g}{3R} t$, $\theta = \frac{g}{3R} \cdot \frac{t^2}{2} + C_1$

B.V. då $t = 0$, $\theta(0) = 0$ ger $C_1 = 0$, dvs

$$\theta = \frac{g}{6R} t^2 \quad //$$

(4), (5) ger via (1), (2), (3)

$$T = \frac{1}{3} mg + mg \sin\theta \quad //$$

$$N = \frac{m}{R} \frac{1}{9} g^2 t^2 + mg \cos\theta$$

där $t^2 = \frac{6R}{g} \theta$, dvs

$$N = \frac{2}{3} mg\,\theta + mg \cos\theta \quad //$$

<u>Svar:</u> a) $\theta = \frac{g}{6R} t^2$

b) $N = mg\left(\frac{2}{3}\theta + \cos\theta\right)$

c) $T = mg\left(\frac{1}{3} + \sin\theta\right)$

då $0 \leq \theta \leq \pi$ är $T > 0$ (ok).

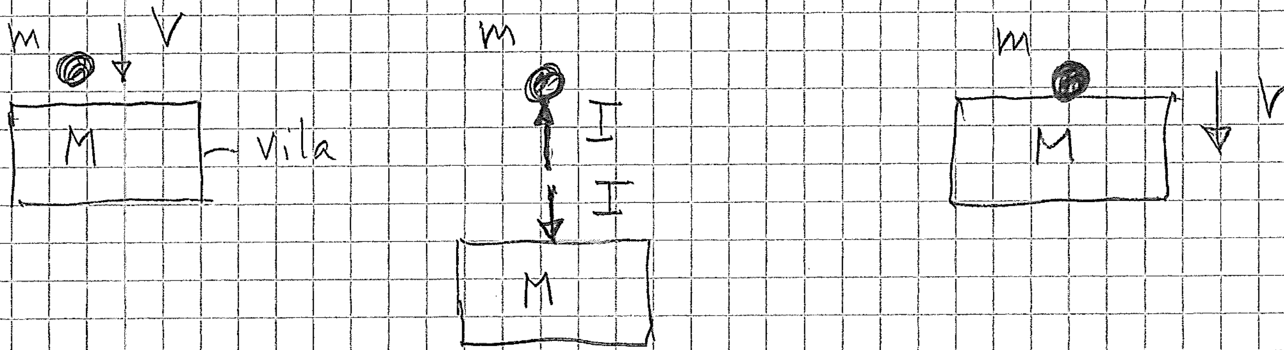
5) Bollens hastighet före stöten fås via $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$$0 = \frac{1}{2} m v^2 - mgh + 0 \quad , \text{ dvs}$$

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$

Stöten

Före Under Efter



stötimpulser ritas ut enbart

$\bar{I}_s = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$ ger för systemet $m+M$

$$\uparrow \quad 0 = (m+M) \cdot (-v') - (m \cdot (-v) + M \cdot 0)$$

$$\rightarrow \quad 0 = 0$$

Dvs $v' = \dfrac{m}{m+M} v$ med $M = 2m$

fås $v' = \dfrac{1}{3} v$ och via (1) $v' = \dfrac{1}{3}\sqrt{2gh}$ //

Impulsen I fås via $\bar{I}_s = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$, applicerad på bollen

$$\uparrow \quad I = m(-v') - m(-v)$$

Dvs $I = m(v - v')$ där $v' = \frac{1}{3} v$

$$I = \frac{2}{3} m v$$

$$I = \frac{2}{3} m \sqrt{2gh} \quad //$$

Hastigheten vid förflyttningen $\delta = \frac{2mg}{k}$ från jämviktsläget.

Vid jämviktsläget är fjädrarna ihoptryckta

$$\delta_0 = \frac{Mg}{2k} = \frac{2mg}{2k} = \frac{mg}{k}$$

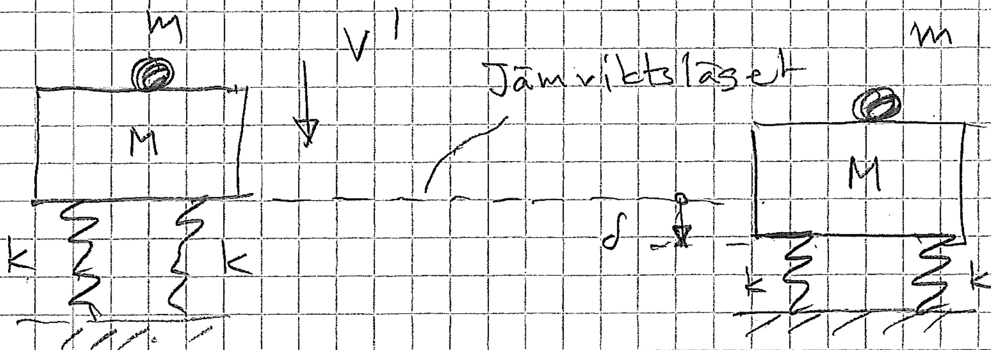
Total deformation (ihoptryckning)

$$= \delta_0 + \delta = \frac{3mg}{k}$$

$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ ger

$$0 = \frac{1}{2}(m+M)v''^2 - \frac{1}{2}(m+M)v'^2 - (m+M)g\delta$$

$$+ \frac{1}{2} 2k(\delta_0 + \delta)^2 - \frac{1}{2} 2k \delta_0^2 \quad (2)$$



med $M = 2m$ och $\delta_0 = \frac{mg}{k}$, $\delta = \frac{2mg}{k}$, $V' = \frac{1}{3}\sqrt{2gh}$

fås ur (2)

$$V''^2 = \frac{2}{9} g \left(h - 6\frac{mg}{k}\right)$$

$$V'' = \sqrt{\frac{2}{9} g \left(h - 6\frac{mg}{k}\right)}$$

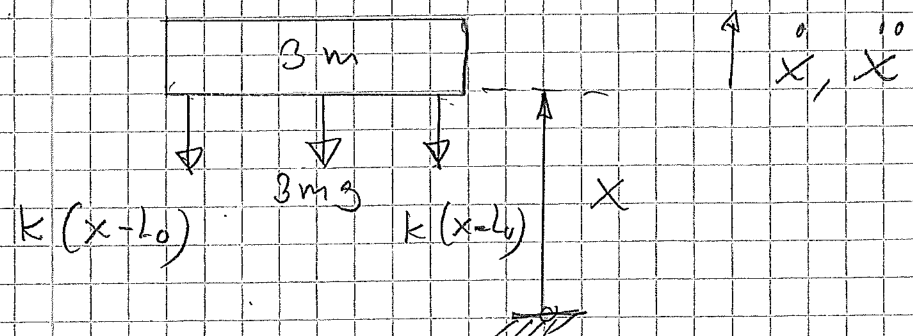
Svar: a) $V' = \frac{1}{3}\sqrt{2gh}$

b) $I = \frac{2}{3} m \sqrt{2gh}$

c) $V'' = \sqrt{\frac{2}{9} g \left(h - 6\frac{mg}{k}\right)}$

6) Frilägg 3m efter klippet.

Låt x ange fjädrarnas längd



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\uparrow \quad -2k(x-L_0) - 3mg = 3m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = -g + \frac{2k}{3m}L_0 \qquad (1)$$

Ident. med $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$

Ger $2\zeta\omega_n = 0, \quad \omega_n^2 = \frac{2k}{3m}$

$\omega_n^2 x_1 = -g + \frac{2k}{3m}L_0$

Dvs $\zeta = 0, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}, \quad x_1 = -\frac{3mg}{2k} + L_0$

(1) har lösningen

$$x = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t - \frac{3mg}{2k} + L_0 \qquad (*)$$

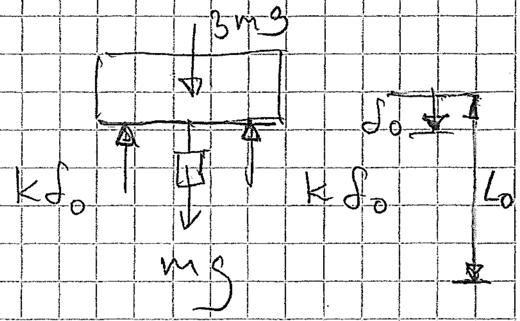
B.V. då $t = 0$

$$x(0) = L_0 - \delta_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

Där δ_0 fås ur jämvikten innan klippet

$$\uparrow \quad 2k\delta_0 - 4mg = 0$$



$$\delta_0 = \frac{2mg}{k}$$

Dvs $x(0) = L_0 - \frac{2mg}{k}$ ger $A = -\frac{mg}{2k}$

$\dot{x}(0) = 0$ ger $B = 0$

$$x(t) = -\frac{mg}{2k}\cos\omega_n t - \frac{3mg}{2k} + L_0 \quad //$$

vändläget $\dot{x} = 0$

$$\frac{mg}{2k}\omega_n \sin\omega_n t = 0 \quad , \quad \sin\omega_n t = 0$$

Första vändläget efter starten då

$$\omega_n t^* = \pi \quad \text{ger} \quad t^* = \frac{\pi}{\omega_n} = \pi\sqrt{\frac{3m}{2k}} \quad //$$

Svar:

a) $x(t) = -\frac{mg}{2k}\left(\cos w_n t + 3\right) + L_0$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$

b) $t^* = \pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$