Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2019-01-10, kl 08.00-13.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: TER1, TER3, TERE

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 9.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel utöver skriv och ritverktyg.
Formelblad bifogas.
Vid behov Svensk-Persisk ordbok.

Svar anslås på kurssidan i Lisam efter skrivningstillfället. Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 8

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2019-01-10

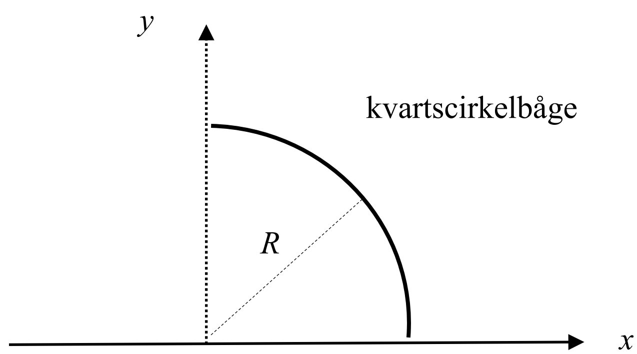
Teoridel:

1)
Centroiden för en linje definieras som bekant som

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\int_L \boldsymbol{r}\, dL}{\int_L dL}$$

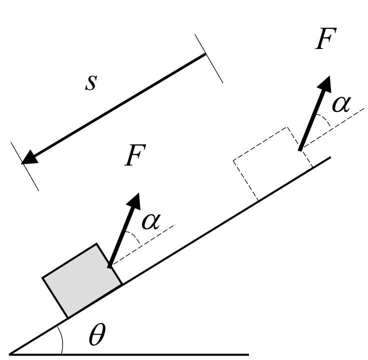
Visa att centroidens läge i y-led för cirkelbågen med radien R i figuren nedan ges av:

$$y_C = \frac{2R}{\pi} \qquad \text{(1p)}$$



2a)
En partikel förflyttar sig en sträcka s nedför ett lutande plan med lutningsvinkeln θ enligt figur. Partikeln bromsas in under rörelsen med en konstant kraft F som hela tiden bildar vinkeln α mot planet. Utgå från definitionen av arbete, $U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \circ d\,\boldsymbol{r}$ och visa att arbetet som kraften F uträttar på partikeln under förflyttningen är

$$U = -F\, s\, cos\alpha\,. \qquad \text{(1p)}$$



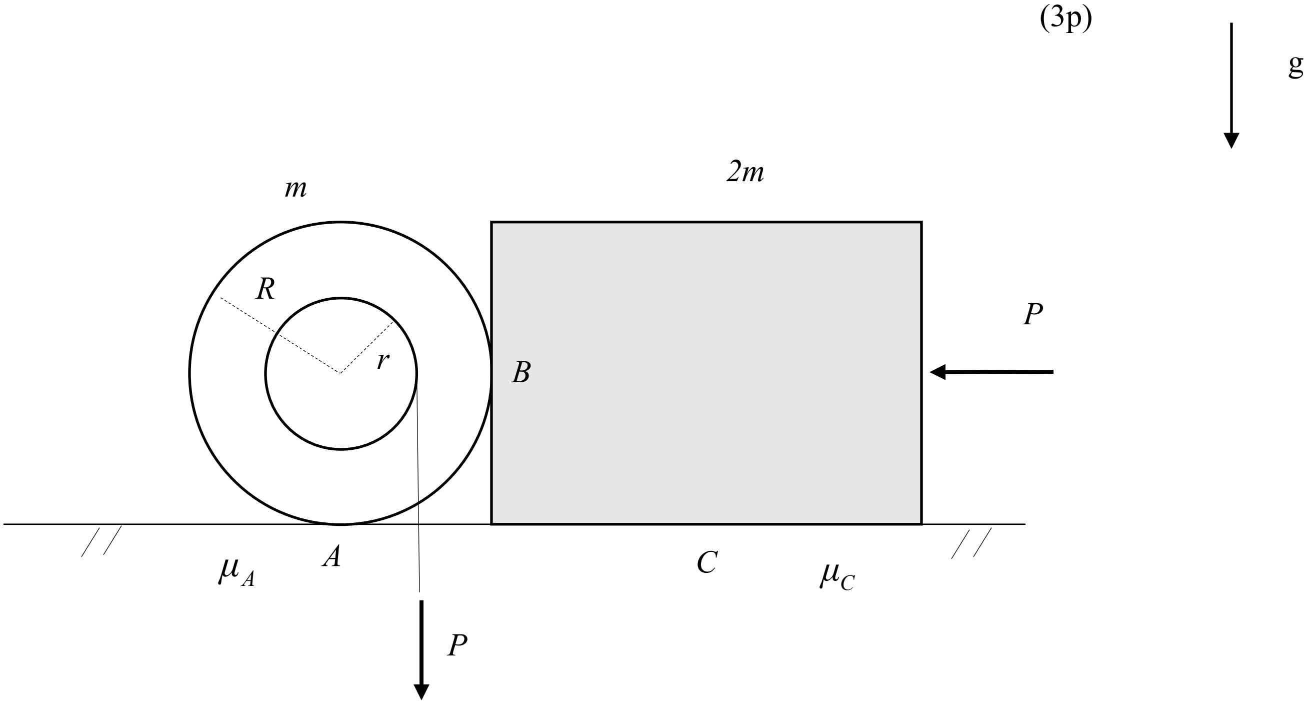
2b)
Utgå från Newtons kraftlag $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ och definitionen av rörelsemängd $\boldsymbol{G} = m\,\boldsymbol{v}$ och härled impulslagen för en partikel, dvs

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F}\, dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1 \qquad (1p)$$

Problemdel:

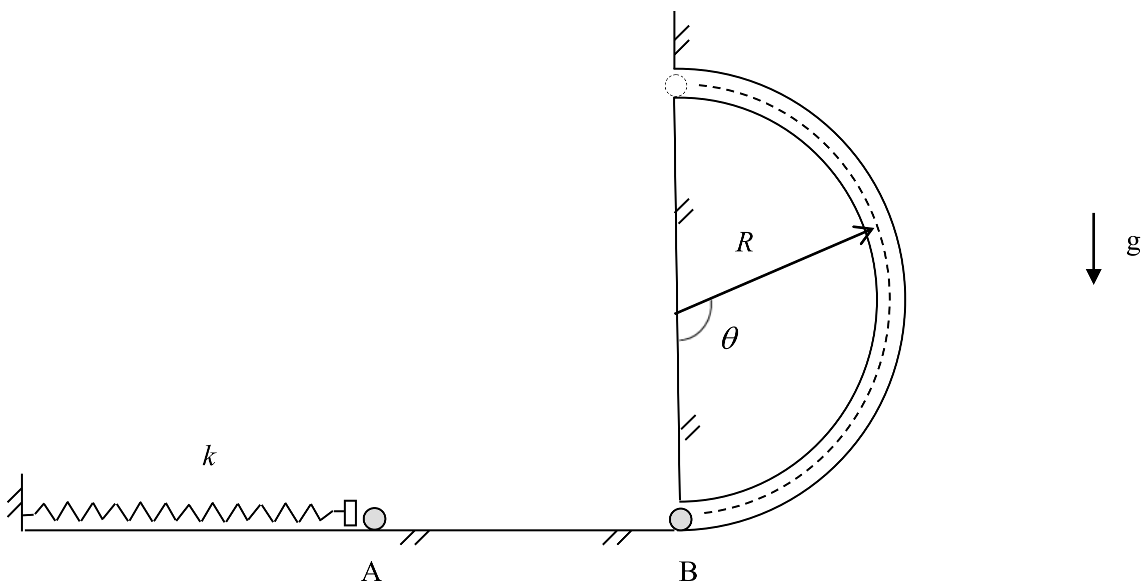
3)
En kabelrulle med massan m och ett rätblock med massan $2m$ är placerade på ett horisontellt underlag enligt figur. Rullen har ytterradien R och innerradien r och är i kontakt med rätblocket vid B. Systemet belastas genom att man drar med en vertikal kraft P i snöret som är fäst i rullens innercirkel och samtidigt applicerar en lika stor horisontell kraft P åt vänster på rätblocket, se figur. Friktionskoefficienten vid kontakten mellan rullen och underlaget vid A har värdet $\mu_A = 1/4$ och mellan rätblocket och underlaget vid C är värdet $\mu_C = 1/5$. Kontakten mellan rullen och rätblocket vid B är friktionsfri. Kraften P ökas på båda ställena från noll och uppåt. Hur stor kan kraften P vara om alla kropparna ska befinna sig i vila? Ange även åt vilket håll friktionskraften vid A och C är riktad. Låt $R = 2r$ vid beräkningen och det får antas att rätblocket inte tippar.

(3p)



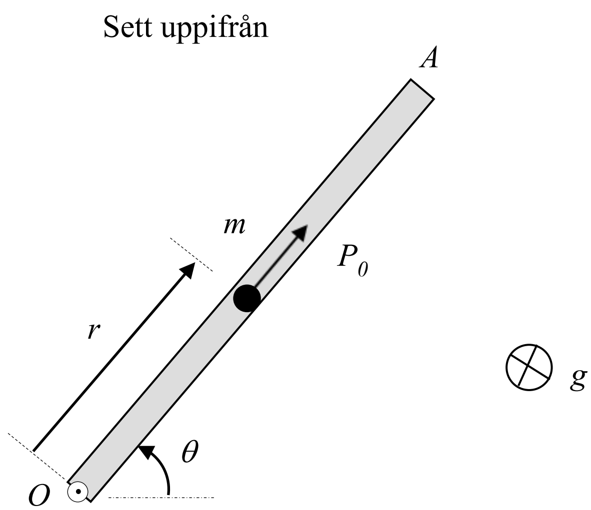
4)
En partikel A med massan *m* är intryckt i en fjäder med fjäderkonstanten *k* och fjäderns deformation (ihoptryckning) i detta läge är δ. Partikeln A släpps från vila i detta intryckta läge och kolliderar senare med en stillastående partikel B som även den har massan *m*, se figur. Efter kollisionen (stöten) åker partiklarna i ett cirkulärt spår vars radie är *R*. Man observerar att partikel B efter kollisionen precis når upp till den högsta punkten på cirkeln. Energiförlusten vid kollisionen antas vara den enda energiförlusten i systemet.
Låt $k = 9mg/R$ och $\delta = R$.

Beräkna:
a) stöttalet *e* mellan partiklarna A och B vid kollisionen (2p)
b) normalkraften från spåret på partikel B när den passerar läget $\theta = \pi/2$ (1p)



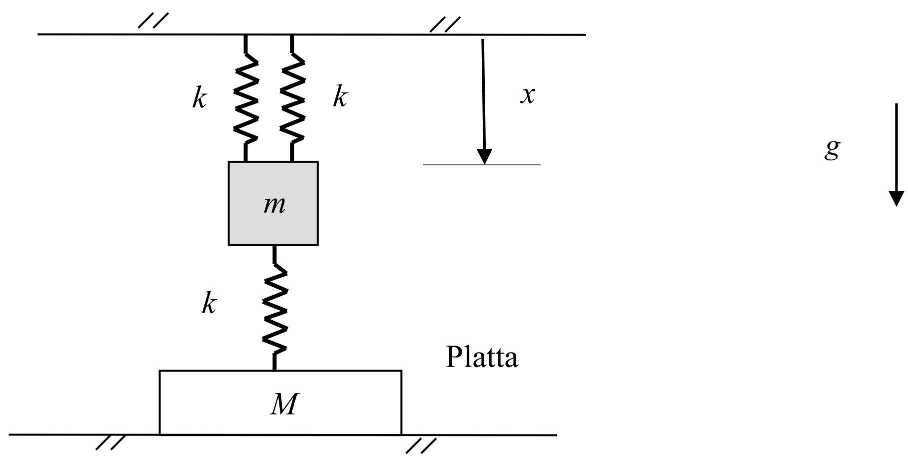
5)
En partikel med massan m kan friktionsfritt röra sig inuti ett <u>horisontellt</u> rör enligt figur. Röret är fixerat vid O och roterar moturs med konstant vinkelhastighet $\dot{\theta} = \omega$. En given <u>konstant</u> kraft P_0 verkar i radiell riktning på partikeln hela tiden. Partikeln startas vid tiden $t = 0$ genom att den släpps utan hastighet relativt röret då avstånder $r = r_0$ (d.v.s $r = r_0$ och $\dot{r} = 0$ då $t = 0$). Beräkna <u>läget</u> r och <u>normalkraften</u> N från röret på partikeln som funktion av tiden t.

(3p)



6)
En partikel med massan m är kopplad till tre fjädrar med fjäderkonstanten k vardera enligt figur. Den undre fjädern är fäst i en platta med massan M som är placerad på ett horisontellt underlag. Alla fjädrarna är ospända då $x = L_0$, där L_0 är den ospända längden för respektive fjäder. Systemet startas vid tiden $t = 0$ genom att massan m släpps utan hastighet från positionen $x = L_0 + mg / 4k$. Beräkna läget x samt normalkraften N mellan plattan och underlaget som funktion av tiden för den efterföljande rörelsen. Det får antas att plattans massa M är så pass stor så att plattan inte lättar från underlaget (d.v.s. den befinner sig i kontakt med underlaget hela tiden).

(3p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

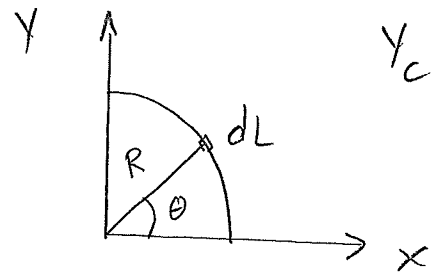
Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

2019-01-10

1)



$$Y_c = \frac{\int_L y\,dL}{\int_L dL}$$

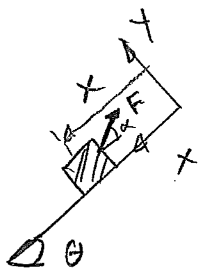
$$\begin{cases} dL = R\,d\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

$$\int_L y\,dL = \int_0^{\pi/2} R\sin\theta\, R\,d\theta = R^2\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = R^2 \quad //$$

$$\int_L dL = \int_0^{\pi/2} R\,d\theta = R\left[\theta\right]_0^{\pi/2} = R\frac{\pi}{2} \quad //$$

$$Y_c = \frac{R^2}{R\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi} \quad \text{V.S.V.} \quad //$$

2a)



$$U = \int_1^2 \bar{F}\circ d\bar{r}$$

$$\bar{F} = -F\cos\alpha\,\bar{e}_x + F\sin\alpha\,\bar{e}_y$$

$$\bar{r} = x\,\bar{e}_x \;;\quad d\bar{r} = dx\,\bar{e}_x$$

$$U = \int_1^2 (-F\cos\alpha\,\bar{e}_x + F\sin\alpha\,\bar{e}_y)\circ dx\,\bar{e}_x = \int_0^s -F\cos\alpha\,dx$$

$$U = -F\cos\alpha\int_0^s dx = -F\cos\alpha\left[x\right]_0^s = -F\cos\alpha\cdot s$$

V.S.V. //

2b) $$\Sigma \bar{F} = m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$$

mult. med dt och integrera mellan t_1 och t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m\bar{v})\,dt = \left[m\bar{v}\right]_{t_1}^{t_2} =$$

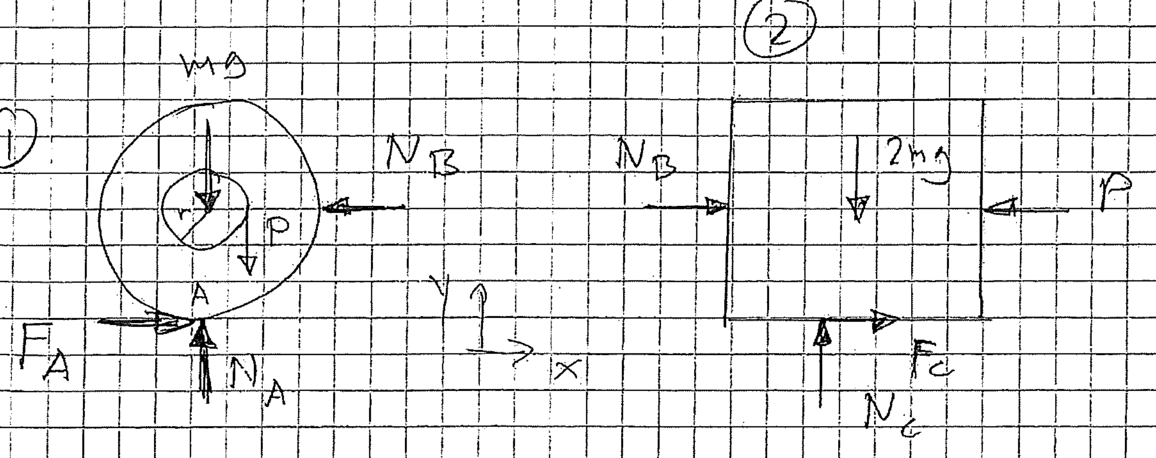
$$= m\bar{v}(t_2) - m\bar{v}(t_1) = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1$$

Men $\bar{G} = m\bar{v}$ och $\bar{G}_2 = m\bar{v}_2$, $\bar{G}_1 = m\bar{v}_1$

Således: $$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{F}\,dt = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$$ V.S.V.

//

3) Frilägg delarna



$\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$ ger för givet P.

1 $\rightarrow$ $F_A - N_B = 0$ (1)

$\uparrow$ $N_A - mg - P = 0$ (2)

$\curvearrowleft A$ $N_B \cdot R - P \cdot r = 0$ (3)

2 $\rightarrow$ $N_B + F_c - P = 0$ (4)

$\uparrow$ $N_c - 2mg = 0$ (5)

Med $R = 2r$ fås via (1) - (5)

$$\begin{cases} F_A = \frac{1}{2} P \\ N_A = P + mg \end{cases} \qquad \begin{cases} F_c = \frac{1}{2} P \\ N_c = 2mg \end{cases}$$

$N_B = \frac{P}{2}$ där $P \geq 0$

Villkor: $|F_A| \le \mu_A |N_A|$, $N_A \ge 0$ (*)

$|F_C| \le \mu_C |N_C|$, $N_C \ge 0$ (**)

$N_B \ge 0$ (ok)

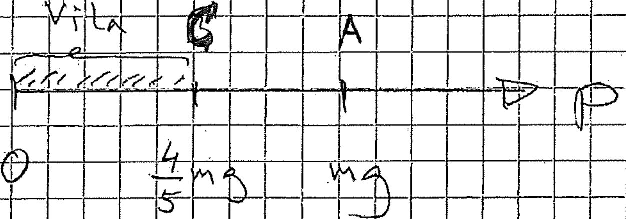
(*) ger $\frac{1}{2} P \le \frac{1}{4}(P + mg)$, $N_A \ge 0$ (ok)

dvs $P \le mg$ $\boxed{A}$

(**) ger $\frac{1}{2} P \le \frac{1}{5} \cdot 2mg$, $N_C \ge 0$ (ok)

dvs $P \le \frac{4}{5} mg$ $\boxed{C}$

Således:



Vi får $0 \le P \le \frac{4}{5} mg$ dvs

$$P_{max} = \frac{4}{5} mg \quad //$$

F_A, F_C åt höger //

4)

Före stöten för part A.

$$u = \Delta T + \underbrace{\Delta V_g}_{=0} + \Delta V_e$$

$$0 = \frac{1}{2} m V_{A_1}^2 - \frac{1}{2} k \delta^2$$

$$V_{A_1}^2 = \frac{k}{m} \delta^2 = \frac{9mg}{R} \cdot \frac{1}{m} \cdot R^2 = 9gR$$

$$\begin{cases} V_{A_1} = 3\sqrt{gR} & \text{Före stöten} \\ V_{B_1} = 0 \end{cases}$$

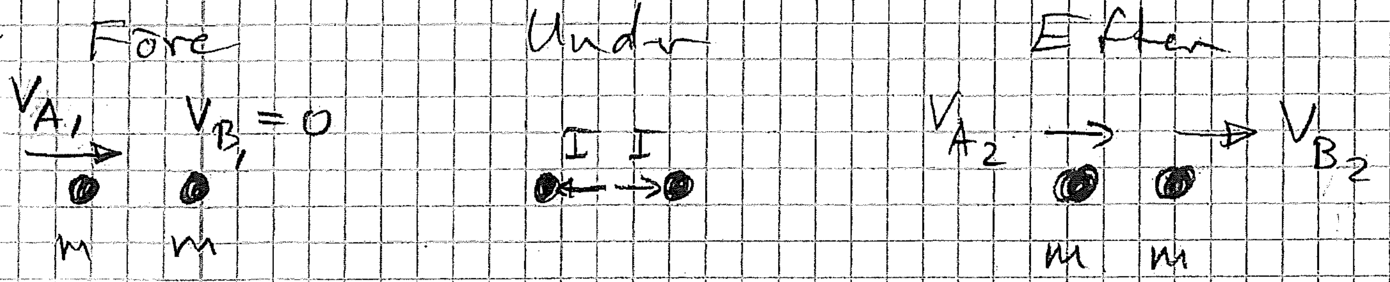
Efter stöten för part B.

$$u = \Delta T + \Delta V_g + \underbrace{\Delta V_e}_{=0}$$

$$0 = 0 - \frac{1}{2} m V_{B_2}^2 + mg \cdot 2R$$

$$\begin{cases} V_{B_2} = 2\sqrt{gR} & \text{Efter stöten} \\ V_{A_2} = ? \end{cases}$$

Stöten



$$\Delta \bar{G}_{syst.} = \bar{0} \quad \text{ger}$$

$$\rightarrow \quad 0 = mV_{A_2} + mV_{B_2} - mV_{A_1}$$

$$\text{ger} \quad V_{A_2} = V_{A_1} - V_{B_2} = 3\sqrt{gR} - 2\sqrt{gR}$$

$$V_{A_2} = \sqrt{gR}$$

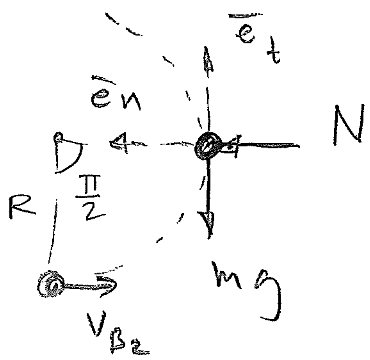
$$\text{stöttalet} \quad e = \frac{V_{B_2} - V_{A_2}}{V_{A_1} - V_{B_1}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{gR} - \sqrt{gR}}{3\sqrt{gR} - 0} = \frac{1}{3}$$

a) <u>Svar</u> $e = \frac{1}{3}$ //

Normalkraften på partikel B
då $\theta = \frac{\pi}{2}$

Frilägg (vid $\theta = \frac{\pi}{2}$)



Kinematik

$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}$

$a_t = \ddot{s}$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$

$\bar{e}_n: \quad \leftarrow \quad N = m\frac{v^2}{R} \quad (1)$

$\bar{e}_t: \quad \uparrow \quad -mg = m\ddot{s} \quad (2)$

(1) ger $N = m\frac{v^2}{R}$ där v fås ur

$U = \Delta T + \Delta V_g + \underbrace{\Delta V_e}_{=0}$

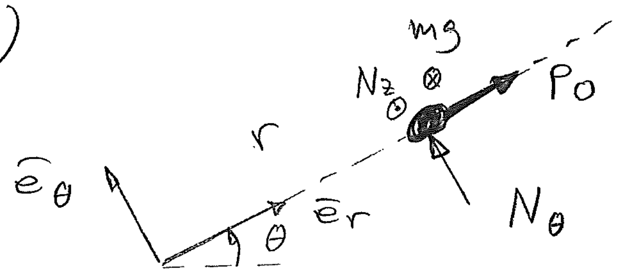
$0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_{B_2}^2 + mgR$ dvs

$v^2 = v_{B_2}^2 - 2gR$, $v^2 = 2gR$; $N = 2mg$

b) <u>Svar</u>: $N = 2mg$ //

Frilägg

5)



Kinematik $(r-\theta)$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - r\omega^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} =$$
$$= r \cdot 0 + 2\dot{r}\omega = 2\dot{r}\omega$$

$\dot{\theta} = \omega = $ konst., $\ddot{\theta} = 0$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\bar{e}_r$: $\nearrow$ $P_0 = m(\ddot{r} - r\omega^2)$ (1)

$\bar{e}_\theta$: $\nwarrow$ $N_\theta = m 2\dot{r}\omega$ (2)

$\bar{e}_z$: $\odot$ $N_z - mg = m \cdot 0$ (3)

(1) ger $\ddot{r} - r\omega^2 = \dfrac{P_0}{m}$ har lösn.

$$r = r_h + r_p$$

- r_p fås med ansatsen $r_p = C_0 = $ konst.

  ger $r_p = -\dfrac{P_0}{m\omega^2}$ //

- r_h fås via kar. ekv. till $\ddot{r} - r\omega^2 = 0$

  $\lambda^2 - \omega^2 = 0$, $\lambda_1 = \omega$, $\lambda_2 = -\omega$, dvs

  $r_h = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ //

Således:

$$r(t) = Ae^{wt} + Be^{-wt} - \frac{P_0}{mw^2}$$

B.V. då $t = 0$,

$r(0) = r_0$ ger $A + B - \frac{P_0}{mw^2} = r_0$

$\dot{r}(0) = 0$ ger $Aw - Bw = 0$

Dvs $A = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{P_0}{mw^2}\right)$; $B = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{P_0}{mw^2}\right)$

Således: $r(t) = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{P_0}{mw^2}\right)\left(e^{wt} + e^{-wt}\right) - \frac{P_0}{mw^2}$ //

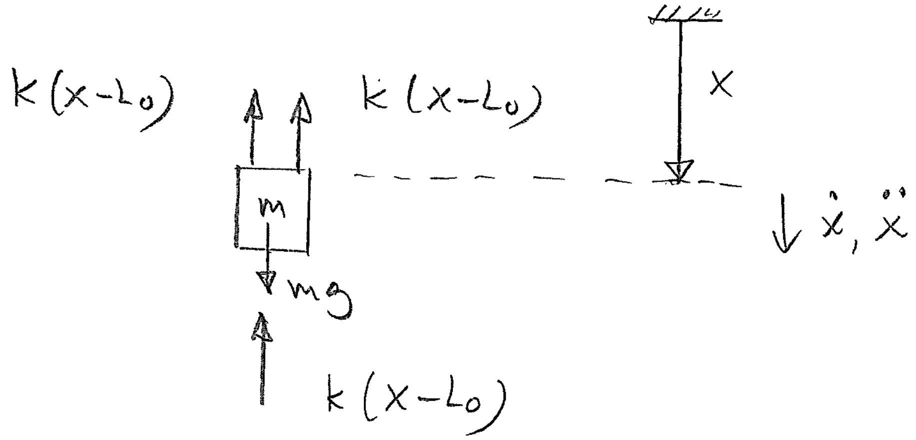
(2) ger $N_\theta = 2mw\dot{r}$, $\dot{r} = w\frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{P_0}{mw^2}\right)\left(e^{wt} - e^{-wt}\right)$

$N_\theta = mw^2\left(r_0 + \frac{P_0}{mw^2}\right)\left(e^{wt} - e^{-wt}\right)$ //

(3) ger $N_z = mg$ //

Således: $N = \sqrt{N_\theta^2 + N_z^2}$ //

6) Frilägg massan m



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger $\downarrow$ $mg - 3k(x - L_0) = m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{3k}{m}x = g + \frac{3kL_0}{m}$$

Identifiera med $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$

$0 = 2\zeta\omega_n$, $\frac{3k}{m} = \omega_n^2$, $g + \frac{3k}{m}L_0 = \omega_n^2 x_1$

Dvs: $\zeta = 0$, $\omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m}}$, $x_1 = \frac{mg}{3k} + L_0$ och

$$x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{mg}{3k} + L_0$$

B.V. då $t = 0$

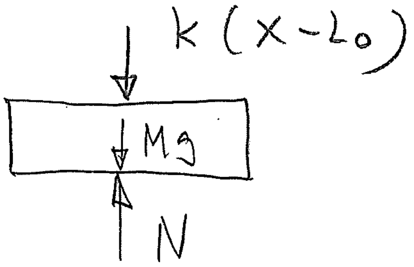
$x(0) = L_0 + \frac{mg}{4k}$ ger $A + \frac{mg}{3k} + L_0 = L_0 + \frac{mg}{4k}$

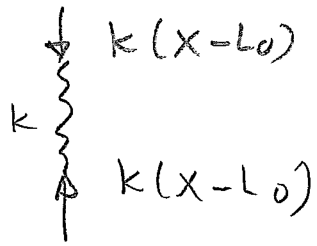
$\dot{x}(0) = 0$ ger $0 + B\omega_n = 0$

Dvs: $A = -\frac{mg}{12k}$, $B = 0$

Således: $$x(t) = -\frac{mg}{12k}\cos\omega_n t + \frac{mg}{3k} + L_0 \qquad //$$

Frilägg plattan och bestäm $N(t)$





$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger $\downarrow$ $k(x-L_0) + Mg - N = M \cdot 0$

Dvs $N = Mg + k(x - L_0)$

Således: $$N(t) = Mg + \frac{mg}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\cos\omega_n t\right)$$

$$\text{där } \omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m}} \qquad //$$

($N > 0$ $\forall t$, dvs kontakt)