Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2018-10-29, kl 14.00-19.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal:

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel utöver skriv och ritverktyg.
Formelblad bifogas.
Vid behov Svensk-Persisk ordbok.

Svar anslås på kurssidan i Lisam efter skrivningstillfället. Tentan lämnas efter rättning till Studerande-expeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2018-10-29

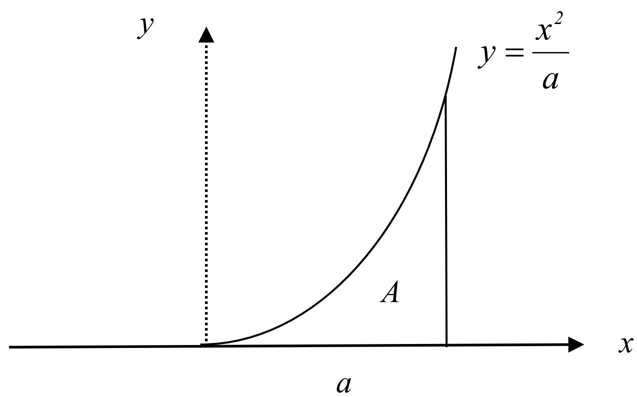
Teoridel:

1)
Masscentrum för en kropp definieras som bekant

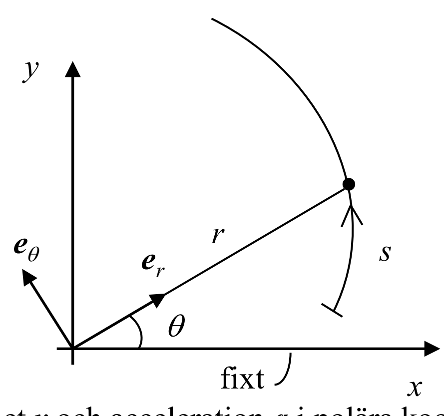
$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\int_V \boldsymbol{r}\rho\, dV}{\int_V \rho\, dV}, \text{ där } \rho = \text{densiteten}$$

Visa att masscentrums läge i y-led för en tunn homogen plåt med tjockleken t och arean A som begränsas av kurvan $y = x^2 / a$ och x-axeln samt linjen $x = a$ enligt figur ges av:

$$y_G = \frac{3a}{10} \qquad \text{(1p)}$$



2)
En partikels bana i polära koordinater ges av $r = r(t)$ och $\theta = \theta(t)$ där t är tiden, se figur.



Visa att partikelns hastighet $\boldsymbol{v}$ och acceleration $\boldsymbol{a}$ i polära koordinater kan skrivas

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta$$

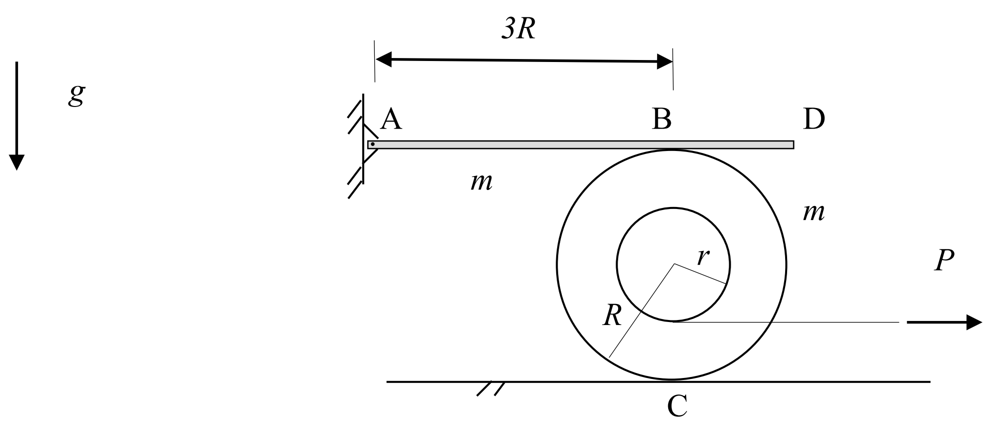
$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \qquad \text{(2p)}$$

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27, 2018-10-29

Problemdel:

3)
En kabelrulle med massan m och ytterradie R är placerad på ett horisontellt underlag enligt figur. En horisontell tunn stång AD med massan m och längden $4R$ ligger an mot rullens högsta punkt B på avståndet $3R$ från stödet vid A (pin support). Ett snöre är fäst runt inner-radien r på rullen och en dragkraft P appliceras i snöret som är horisontellt. Den statiska friktionskoefficienten vid båda kontaktpunkterna B och C är $\mu_s = 1/2$. Systemets delar är i vila varefter kraften P ökas sakta från noll och uppåt. Låt rullens ytterradie vara $R=2r$ och beräkna:

a) Friktions och normalkraften vid B och C uttryckt i P, m och g vid jämvikt. (2p)
b) Maximala dragkraften P som kan tillåtas om systemets delar ska förbli i vila. (1p)

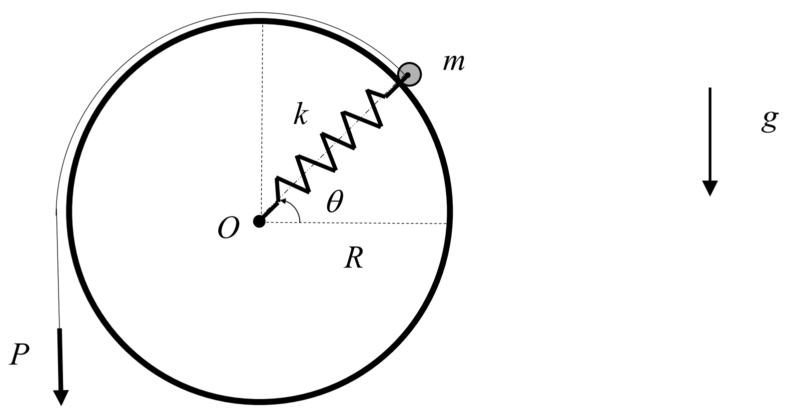


.

4)
En partikel med massan m kan friktionsfritt röra sig på ovansidan av en fix cirkel med radien R. I partikeln är en fjäder med fjäderkonstanten $k = 32mg/R$ och ospända längden $L_0 = R/2$ fäst. Man får partikeln att röra sig med ökande θ genom att man drar med en konstant kraft $P=2mg$ i ett snöre som löper runt cirkeln enligt figur. Partikeln startar med farten noll vid $\theta = 0$ och partikelns dimensioner kan försummas i förhållande till R. Vidare så studeras enbart intervallet

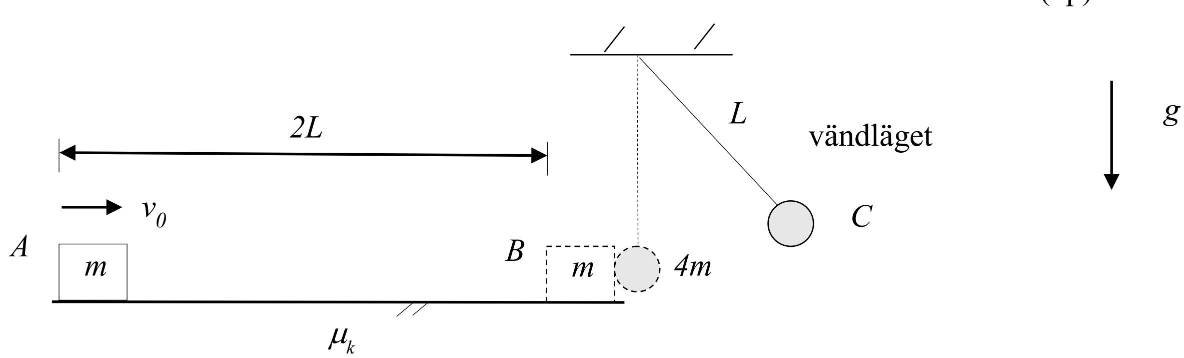
$$0 \le \theta \le \pi.$$

a) Visa att partikelns tangentialacceleration kan skrivas $a_t = (2 - \cos\theta)g$. (1p)
b) Beräkna normalkraften från cirkeln på partikeln som funktion av θ. (2p)



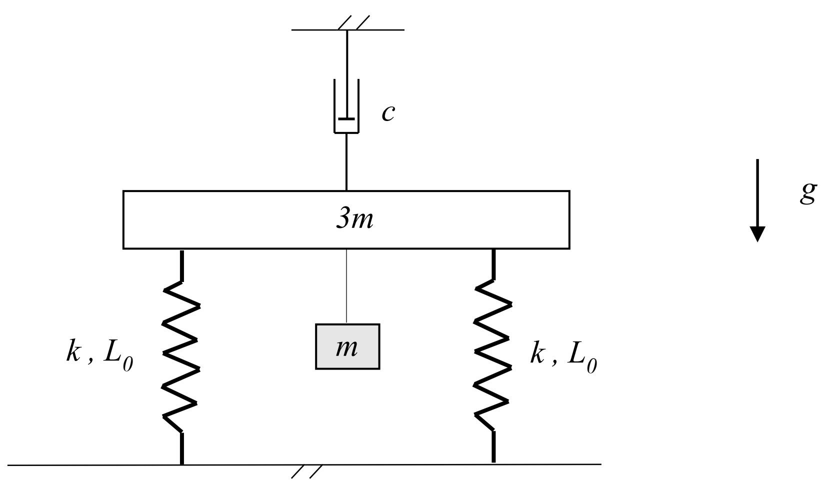
5)
En partikel med massan m ges en utgångshastighet v_0 vid läge A varefter den glider en sträcka $2L$ mellan A och B med friktion med den kinetiska friktionskoefficienten μ_k. Vid läge B stöter den sedan ihop med en stillastående pendelkula med massan $4m$, se figur. Efter stöten svänger pendeln ut och når sitt vändläge vid C. Beräkna kraften i pendelsnöret vid detta vändläge. Pendelsnöret har konstanta längden L och stöttalet vid stöten är e. Låt parametrarna ha värdet $v_0 = \sqrt{6\,gL}$, $\mu_k = 1/2$ och $e = 1/4$.

(3p)



6)
Ett svängande system består av en platta med massan $3m$ som är upphängd i en dämpare och två fjädrar enligt figur. Dämparen har dämpkonstanten c och fjädrarna har fjäderkonstanten k och ospända längden L_0. Via ett snöre är en vikt med massan m fäst i plattan. Systemet släpps från vila (med sträckt snöre) då fjädrarna har ospända längden L_0 och får sedan röra sig fritt.
Låt parametern c vara $c = 4\sqrt{2\,km}$ och beräkna :

a) Kraften i snöret som funktion av tiden t (låt $t = 0$ vid frisläppandet). (2p)
b) Tidpunkten t^* då snörkraften når sitt maximum. (1p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n-t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r-\theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$. Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1) $$y_G = \frac{\int_V y \rho \, dV}{\int_V \rho \, dV} \qquad dV = t\,dA$$

$\rho, t = \text{konst.}$

$$y_G = \frac{\int_A y \rho t \, dA}{\int_A \rho t \, dA} = \frac{\int_A y \, dA}{\int_A dA}$$

$$\int_A y \, dA = \int_A y \, dx\,dy = \int_0^a \left[\int_0^{\frac{x^2}{a}} y \, dy \right] dx$$

$$= \int_0^a \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{x^2}{a}} dx = \int_0^a \frac{x^4}{2a^2} dx = \frac{a^3}{10} \quad //$$

$$\int_A dA = \int_A dx\,dy = \int_0^a \left[\int_0^{\frac{x^2}{a}} dy \right] dx = \int_0^a \left[y \right]_0^{\frac{x^2}{a}} dx$$

$$= \int_0^a \frac{x^2}{a} dx = \frac{a^2}{3} \quad //$$

$$y_G = \frac{\frac{a^3}{10}}{\frac{a^2}{3}} = \frac{3}{10} a \quad //$$

V.S.V.

2b) a)

$\bar{r} = r\bar{e}_r$; $\bar{V} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\bar{e}}_r$

$$\begin{cases} \bar{e}_r = \cos\theta\, \bar{e}_x + \sin\theta\, \bar{e}_y \\ \bar{e}_\theta = -\sin\theta\, \bar{e}_x + \cos\theta\, \bar{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_r = -\dot{\theta}\sin\theta\, \bar{e}_x + \dot{\theta}\cos\theta\, \bar{e}_y = \dot{\theta}\bar{e}_\theta \\ \dot{\bar{e}}_\theta = -\dot{\theta}\cos\theta\, \bar{e}_x - \dot{\theta}\sin\theta\, \bar{e}_y = -\dot{\theta}\bar{e}_r \end{cases}$$

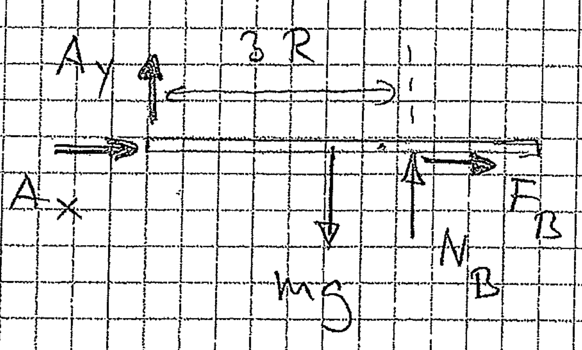
ger $\underline{\bar{V} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta}$ V.S.V

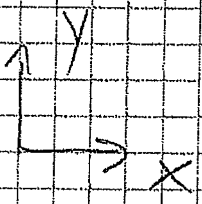
$\bar{a} = \dot{\bar{V}} = \ddot{r}\bar{e}_r + \dot{r}\dot{\bar{e}}_r + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\bar{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\bar{e}}_\theta$

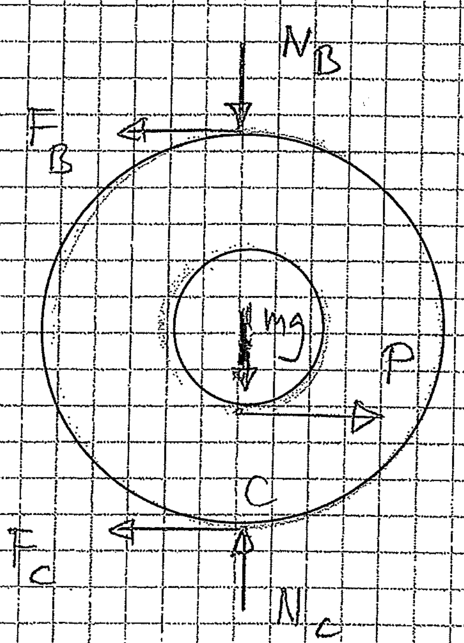
ger $\underline{\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{e}_\theta}$

V.S.V

3) Frilägg delarna







$\mu_s = \mu = \frac{1}{2}$

$R = 2r$

<u>Rullen</u>

$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad P - F_C - F_B = 0 \qquad (1)$

$\sum F_y = 0 \quad \uparrow \quad N_C - mg - N_B = 0 \qquad (2)$

$\sum M_z = 0 \quad \circlearrowleft C \quad F_B \cdot 2R - P(R - r) = 0 \qquad (3)$

<u>Stången</u>

$\sum M_z = 0 \quad \circlearrowleft A \quad N_B \cdot 3R - mg \cdot 2R = 0 \qquad (4)$

4 obekanta 4 ekv för givet P

(1) -- (4) ger med $R = 2r$

a) $\begin{cases} F_B = \frac{P}{4} \\ N_B = \frac{2}{3} mg \end{cases}$ $\begin{cases} F_C = \frac{3}{4} P \\ N_C = \frac{5}{3} mg \end{cases}$ //

<u>Villkor</u> $|F_B| \le \mu |N_B|$; $N_B \geq 0$ (*)

$|F_C| \le \mu |N_C|$; $N_C \geq 0$ (**)

(*) ger $\frac{P}{4} \le \mu \cdot \frac{2}{3} mg$; $N_B > 0$ (ok)

dvs $P \le \frac{24}{9} \mu mg$ $\boxed{B}$

(**) ger $\frac{3}{4} P \le \mu \frac{5}{3} mg$; $N_C > 0$ (ok)

dvs $P \le \frac{20}{9} \mu mg$ $\boxed{C}$

b) Således: $P_{max} = \frac{20}{9} \mu mg$ med $\mu = \frac{1}{2}$

fås $P_{max} = \frac{10}{9} mg$ //

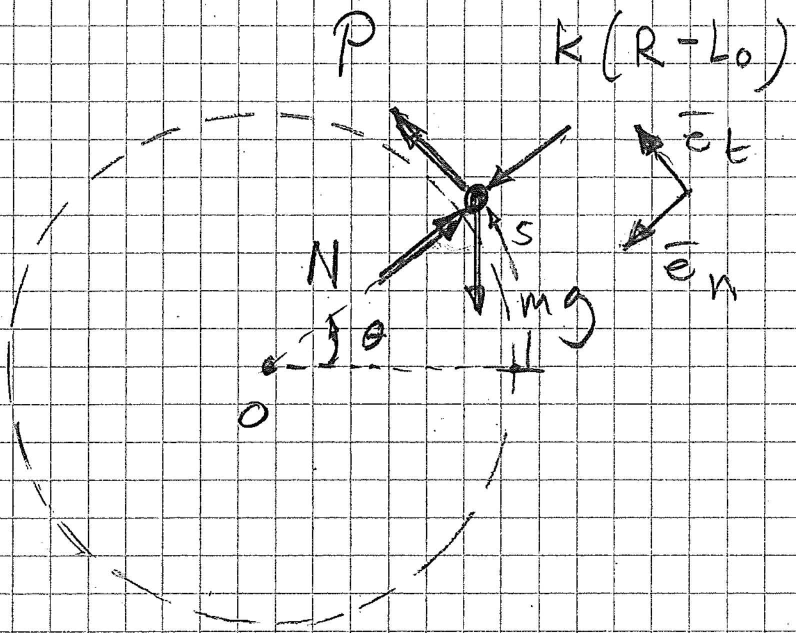
Villkoret vid $\boxed{C}$ ger den övre gränsen på P.

4) Frilägg m $\quad P = 2mg, \; L_0 = \frac{R}{2}, \; k = \frac{32mg}{R}$

Kinematik

$a_t = \ddot{s}$

$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}$



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$

$\bar{e}_t$: $\quad P - mg\cos\theta = ma_t \qquad (1)$

$\bar{e}_n$: $\quad -N + mg\sin\theta + k(R - L_0) = m\frac{v^2}{R} \qquad (2)$

Med $P = 2mg$ i (1) fås

a) $a_t = (2 - \cos\theta)g$ // V.S.V.

(2) ger med $k = \frac{32mg}{R}$, $L_0 = \frac{R}{2}$

$$N = 16mg + mg\sin\theta - m\frac{v^2}{R} \qquad (*)$$

Bestäm $v(\theta)$ sedan.

$s = R\theta$, $ds = R\,d\theta$

men $a_t = \ddot{s} = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$ dvs

$a_t\,ds = v\,dv$ ger med $a_t = (2-\cos\theta)g$

$ds = R\,d\theta$

$$\int (2-\cos\theta)gR\,d\theta = \int v\,dv$$

$$gR(2\theta - \sin\theta) = \frac{v^2}{2} + C_1$$

B.V. då $\theta = 0$, $v = 0$ ger $C_1 = 0$

dvs $v^2(\theta) = 2gR(2\theta - \sin\theta)$ ins. i (*) ger

b) $N(\theta) = mg(16 + 3\sin\theta - 4\theta)$ //

$N > 0$ då $0 \leq \theta \leq \pi$ kontakt villkor ok

• Alternativ beräkning av $v(\theta)$

1) Använd $s = R\theta$, $v = \dot{s} = R\dot{\theta}$, $a_t = \ddot{s} = R\ddot{\theta}$

och $\ddot{\theta}\, d\theta = \dot{\theta}\, d\dot{\theta}$ ger $v(\theta)$

2) Använd $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

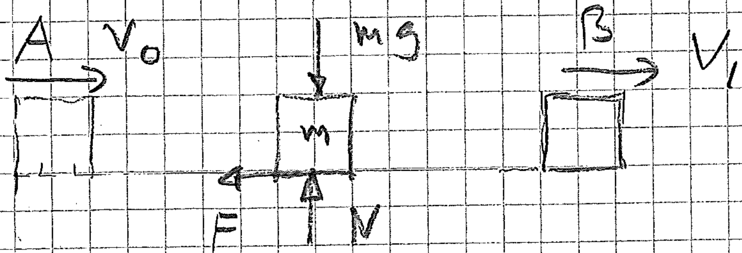
där $U = \int_1^2 \bar{P} \circ d\bar{r} = \int_0^{R\theta} P\, ds = PR\theta = 2mgR\theta$

$\Delta T = \frac{1}{2} m v^2 - 0$, $\Delta V_g = mgR \sin\theta - 0$

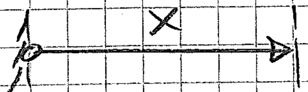
$\Delta V_e = \frac{1}{2} k (R - L_0)^2 - \frac{1}{2} k (R - L_0)^2 = 0$

ger $v(\theta)$

5) <u>A - B</u>



Bestäm v_1



$F = \mu_k N = \mu_k mg$

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \qquad \begin{cases} \bar{F} = -\mu_k mg \bar{e}_x \\ d\bar{r} = dx\,\bar{e}_x \end{cases}$$

$$U = \int_A^B \bar{F} \circ d\bar{r} = \int_0^{2L} -\mu_k mg\,dx = -\mu_k mg\,2L$$

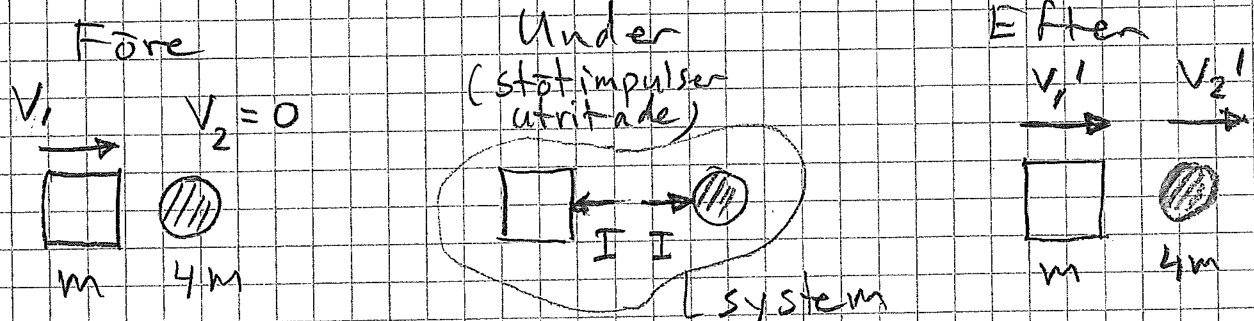
$(\bar{N} \perp d\bar{r},\ \bar{N} \circ d\bar{r} = 0)$, $\Delta V_g = 0$, $\Delta V_e = 0$

$$-\mu_k mg\,2L = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 + 0 + 0$$

med $\mu_k = \frac{1}{2}$, $v_0 = \sqrt{6gL}$ fås

$$v_1^2 = 4gL, \quad v_1 = 2\sqrt{gL} \quad //$$

<u>Stöten</u>



$\bar{I}_s = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$ för systemet ses

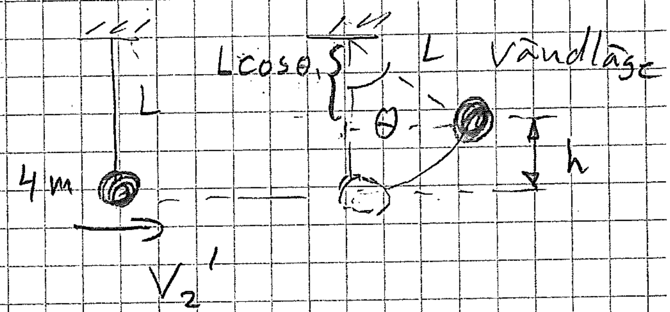
$$\rightarrow \quad 0 = m v_1' + 4m v_2' - (m v_1 + 4m \cdot 0) \qquad (1)$$

stöttalet $\quad e = \dfrac{V_2' - V_1'}{V_1 - 0} = \dfrac{1}{4} \quad (2)$

(1), (2) ger $\begin{cases} 4V_2' + V_1' = V_1 \\ V_2' - V_1' = \frac{1}{4} V_1 \end{cases}$

Har Lösn. $\quad V_1' = 0 \quad , \quad V_2' = \frac{1}{4} V_1 = \frac{1}{2}\sqrt{gL}$

<u>Efter stöten till vändläget</u> (Bestäm θ)



$U = \Delta T + \Delta V_g + \overset{0}{\Delta V_e}$

$0 = 0 - \frac{1}{2} 4m V_2'^2 + 4mgh - 0$

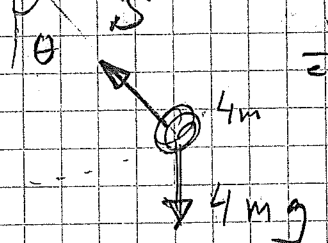
$h = L - L\cos\theta$

ger $\quad \cos\theta = 1 - \dfrac{V_2'^2}{2gL} \quad$ med $\quad V_2' = \frac{1}{2}\sqrt{gL}$

$\cos\theta = \frac{7}{8}$ vid vändläget //

Bestäm snörkraften vid vändläget

Frilägg



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$

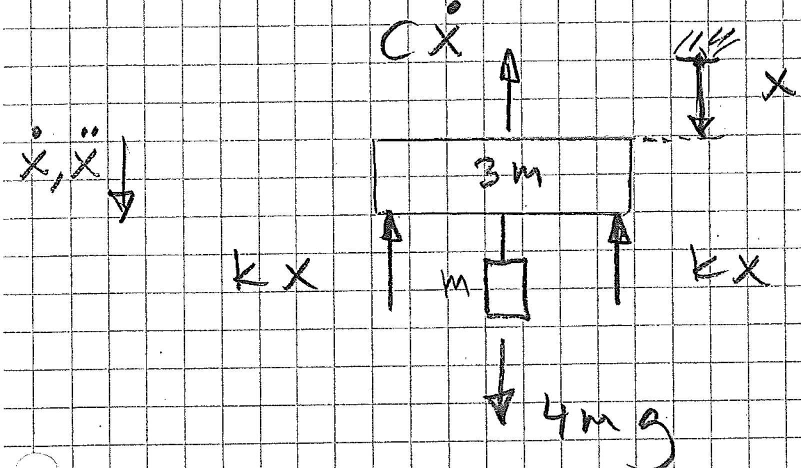
$\bar{e}_n: \quad S - 4mg\cos\theta = 4m\dfrac{v^2}{L}$

men $V = 0$ vändläget

Ger $\quad S = 4mg\cos\theta = 4mg \cdot \frac{7}{8} \quad$ dvs

$S = \frac{7}{2} mg$ //

6) Frilägg systemet och bestäm $x(t)$.



($x = 0$ då fjädrarna är ospända)

$c = 4\sqrt{2km}$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger $\downarrow$ $4mg - c\dot{x} - 2kx = 4m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{c}{4m}\dot{x} + \frac{k}{2m}x = g$$

Ident. med $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$

$$\frac{c}{4m} = 2\zeta\omega_n, \quad \frac{k}{2m} = \omega_n^2, \quad g = \omega_n^2 x_1$$

ger med $c = 4\sqrt{2km}$

$$\zeta = 1, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{2m}}, \quad x_1 = \frac{2mg}{k} \quad \text{dvs}$$

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_n t} + \frac{2mg}{k}$$

B.V. då $t = 0$ $\quad x(0) = 0$ ger $A = -\frac{2mg}{k}$

$\dot{x}(0) = 0$ ger $B = A\omega_n$

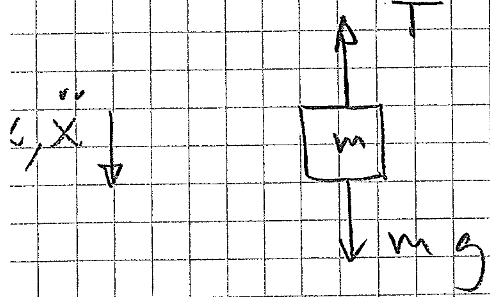
<u>Således:</u>

$$x(t) = -\frac{2mg}{k}(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t} + \frac{2mg}{k} \quad //$$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{2m}}$

Frilägg m och bestäm snörkraften

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger



$\downarrow \quad mg - T = m\ddot{x}$

$T = mg - m\ddot{x}$ där $\ddot{x}$ fås genom derivering 2 ggr av x.

$\ddot{x} = g(1 - w_n t)e^{-w_n t}$

Således:

a) $T(t) = mg - mg(1 - w_n t)e^{-w_n t}$ //

där $w_n = \sqrt{\frac{k}{2m}}$

b) Finn max till $T(t)$.

$\dot{T} = 0$ ger $mg w_n e^{-w_n t} \underbrace{(2 - w_n t)}_{=0} = 0$

Man finner max då $t = t^* = \frac{2}{w_n}$

Således:

$t^* = \frac{2}{w_n} = 2\sqrt{\frac{2m}{k}}$ //