Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2018-08-27, kl 14.00-19.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal:

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks hemsida efter skrivningstillfället. Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2018-08-27

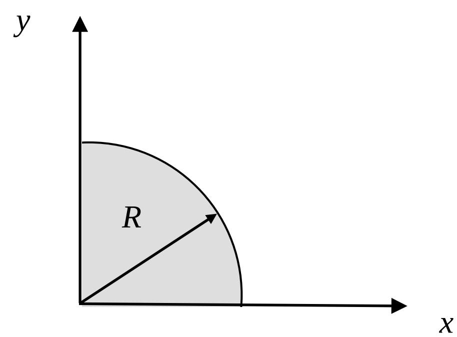
Teoridel:

1)

Centroiden för en yta definieras som bekant som $\boldsymbol{r}_C = \dfrac{\int_A \boldsymbol{r}\, dA}{\int_A dA}$.

Visa att centroidens läge i *y*-led ges av $y_C = \dfrac{4R}{3\pi}$ för arean nedan som begränsas av en kvartscirkel med radien *R* samt *x*-axeln och *y*-axeln.

(1p)



2)

Definitionen av arbetet som uträttas av en kraft $\boldsymbol{F}$ under en förflyttning från läge $\boldsymbol{r}_1$ till $\boldsymbol{r}_2$ längs en kurva C lyder som bekant

$$U = \int_{\boldsymbol{r}_1, C}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{r}$$

Utgå från definitionen ovan och visa att det arbete *U* som kraften från en linjär fjäder uträttar på en partikel P under en godtycklig förflyttning från ett läge 1 till ett läge 2 kan tecknas

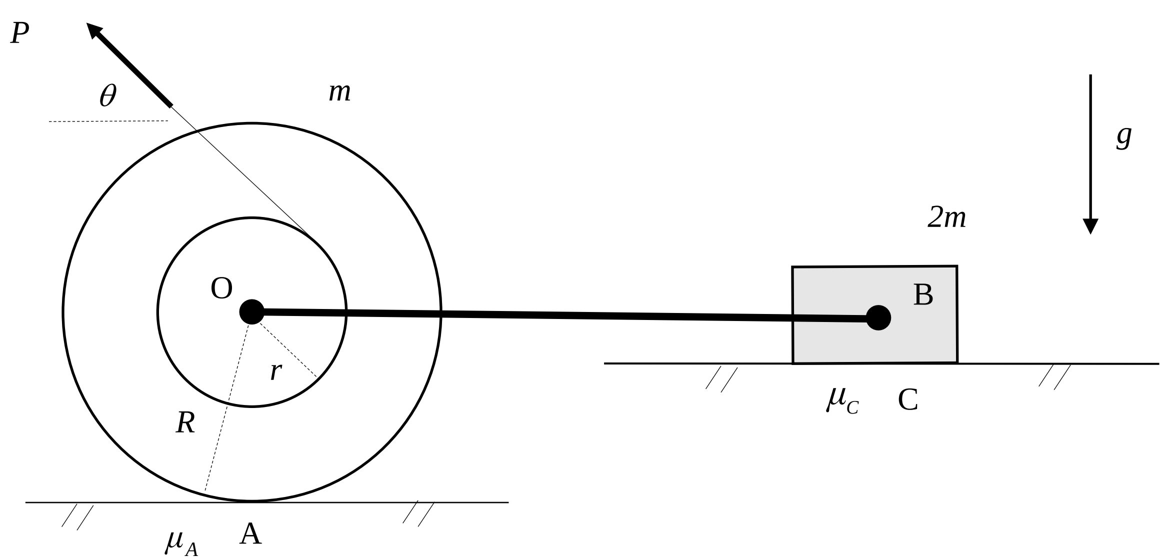
$$U = -(\,V_e(s_2) - V_e(s_1)\,), \qquad V_e(s) = \frac{1}{2} k s^2$$

där V_e är fjäderkraftens potentiella energi, *k* är fjäderkonstanten och *s* är förlängningen från obelastad längd L_0.   (2p)

Problemdel:

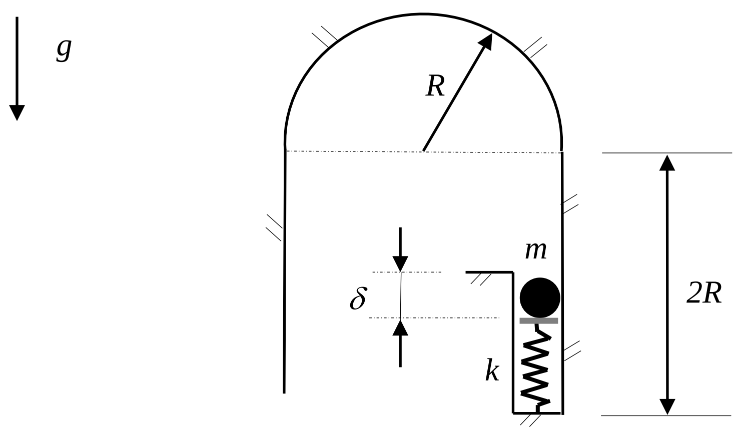
3)
En kabelrulle med massan m och ytterradien R och innerradien r är placerad på ett horisontellt underlag. I rullens centrum O är en horisontell stång OB fäst enligt figur, där ände B är sammankopplad med en kloss med massan 2m. Den statiska friktions-koefficienten mellan rullen och underlaget vid A och mellan klossen och underlaget vid C är lika stora $\mu_A = \mu_C = 1/\sqrt{2}$. Man startar belastningen då systemets delar är i vila genom att man drar med en kraft P i ett snöre som är fäst i innerradien och bildar vinkeln θ mot horisontalen. Man ökar sedan P sakta uppåt från noll. Hur stor kan P maximalt vara om systemets delar skall förbli i vila. Ange även vid vilket av kontaktställena A eller C man först uppnår gränsfallet för begynnande glidning.
Låt $R = 2r$ och $\theta = 45^o$ vid beräkningen. Stången OB:s massa kan försummas och stången är friktionsfritt ledad vid O och B. Klossen är så pass bred att den inte kan tippa.

(3p)

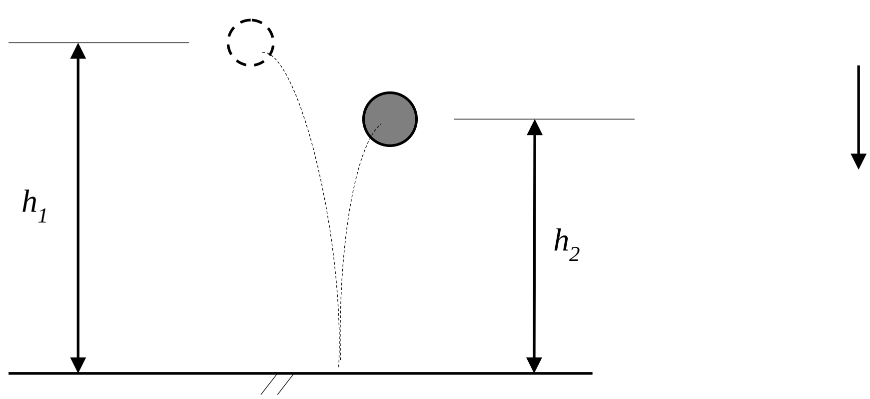


.

4)
En partikel med massan m skjuts iväg med hjälp av en fjäder med den obelastade längden $L_0 = R$ och fjäderkonstanten $k = 16mg/R$. Partikeln släpps från vila då fjädern är ihoptryckt sträckan δ från det obelastade läget. Partikeln följer sedan insidan av en friktionsfri sarg i vertikalplanet enligt figuren. Bestäm minsta möjliga δ för att partikeln ska vara i kontakt med sargen längs hela halvcirkelbågen. (3p)



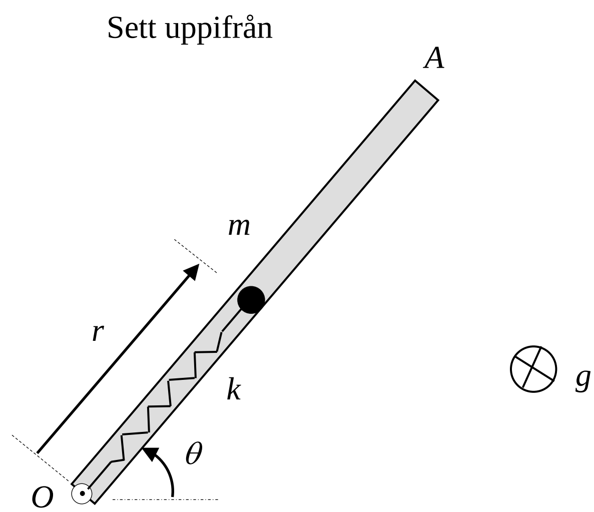
5)
En boll släpps från vila vid höjden h_1, studsar en gång mot ett glatt underlag och når därefter en maximal höjd h_2. Försumma effekter från luftmotstånd och rotation och det får antas att stöttalet e är konstant och att bollen rör sig vertikalt.



Bestäm
a) stötimpulsen från underlaget på bollen (1p)
b) stöttalet e för bollen mot underlaget (1p)
c) maximal höjd h_3 efter nästa studs (1p)

6)
En partikel med massan *m* kan friktionsfritt röra sig inuti ett <u>horisontellt</u> rör enligt figur. En fjäder med fjäderkonstanten *k* är fäst i partikeln och i röret vid O. Röret är fixerat vid O och roterar moturs med konstant vinkelhastighet $\dot{\theta} = \omega$ där $\omega < \sqrt{k/m}$. Vid tiden $t=0$ släpps partikeln i röret utan hastighet relativt röret då fjädern har ospända längden L_0 ($r = L_0$, $\dot{r} = 0$ då $t=0$). Man observerar att partikeln beskriver en svängningsrörelse inuti röret. Beräkna normalkraften från röret på partikeln som funktion av tiden *t*.

(3p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

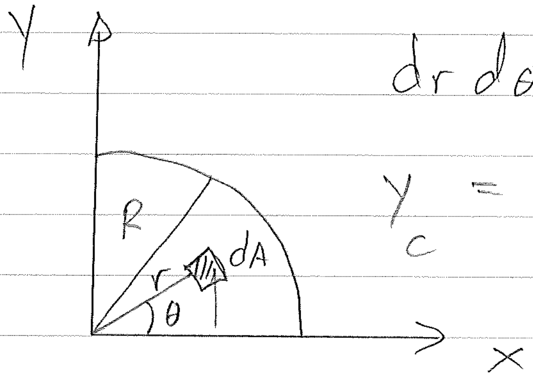
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1)



$dr\,d\theta$ - element

$$Y_c = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}$$

$$\begin{cases} y = r\sin\theta \\ dA = r\,d\theta\,dr \end{cases}$$

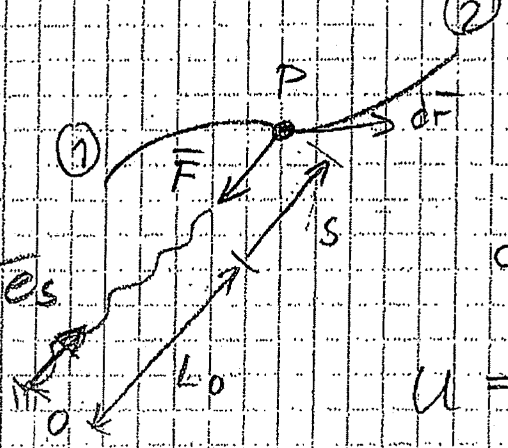
$$\int_A y\,dA = \int_A r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^R r^2\,dr\right]\sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{R^3}{3} \quad //$$

$$\int_A dA = \int_A r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^R r\,dr\right]d\theta = \frac{\pi R^2}{4} \quad //$$

$$Y_c = \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi} \quad \text{V, S, V} \quad //$$

2)



$$\bar{F} = -ks\bar{e}_s$$

$$d\bar{r} = ds\,\bar{e}_s + dr_\perp \bar{e}_{\perp s}$$

$$U = \int_1^2 \bar{F} \circ d\bar{r} =$$

$$\bar{e}_s \circ \bar{e}_{\perp s} = 0$$

$$= \int_1^2 -ks\bar{e}_s \circ \left(ds\,\bar{e}_s + dr_\perp \bar{e}_{\perp s}\right) =$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} -ks\,ds = -\frac{1}{2}k\left(s_2^2 - s_1^2\right) \quad \text{dvs}$$

$$U = -\left(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2\right) =$$

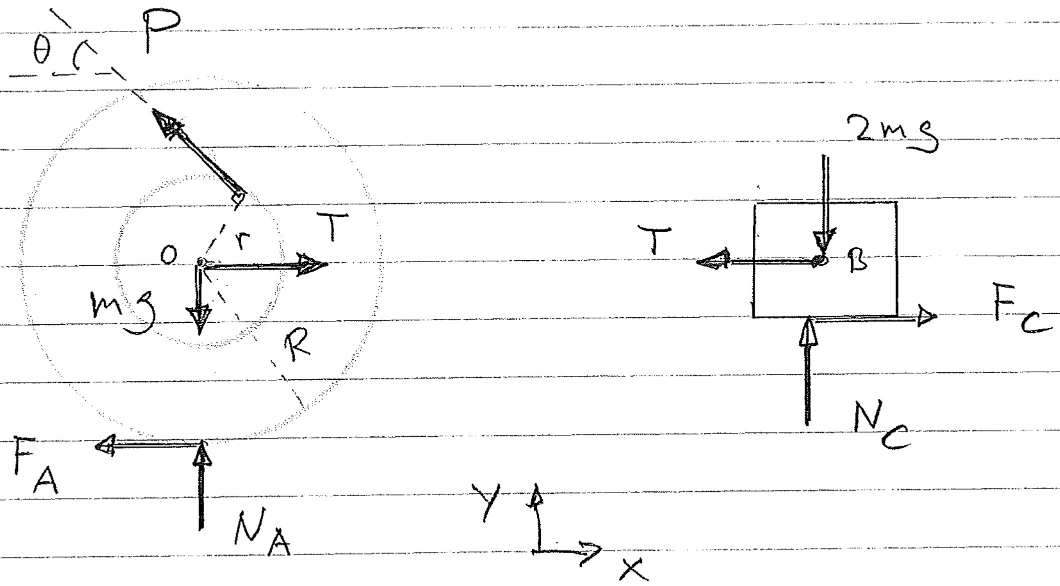
$$= -\left(V_e(s_2) - V_e(s_1)\right) \quad \text{V.S.V.}$$

där $V_e(s) = \frac{1}{2}ks^2$

3) Frilägg delarna

$R = 2r$, $\theta = 45^\circ$

$\mu_A = \mu_C = \frac{1}{\sqrt{2}}$



$\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$ ger

Rullen:

$\rightarrow$ $\quad -P\cos\theta + T - F_A = 0 \qquad (1)$

$\uparrow$ $\quad N_A - mg + P\sin\theta = 0 \qquad (2)$

$\circlearrowleft O$ $\quad P \cdot r - F_A \cdot R = 0 \qquad (3)$

Klossen:

$\rightarrow$ $\quad -T + F_C = 0 \qquad (4)$

$\uparrow$ $\quad N_C - 2mg = 0 \qquad (5)$

(1) .... (5) ger att jämvikten kräver

$$\begin{cases} F_A = P\frac{r}{R} \\ N_A = mg - P\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} F_C = P\left(\frac{r}{R} + \cos\theta\right) \\ N_C = 2mg \end{cases}$$

med $R = 2r$, $\theta = 45°$ fås

$$\begin{cases} F_A = \frac{1}{2}P \\ N_A = mg - \frac{1}{\sqrt{2}}P \end{cases} \qquad \begin{cases} F_C = P\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ N_C = 2mg \end{cases}$$

Villkor: Friktionsvillkoret

A: $|F_A| \leq \mu_A |N_A|$; $N_A \geq 0$ (*)

C: $|F_C| \leq \mu_C |N_C|$; $N_C \geq 0$ (**)

(*) ger $\frac{1}{2}P \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(mg - \frac{1}{\sqrt{2}}P\right)$ och

$mg - \frac{1}{\sqrt{2}}P \geq 0$

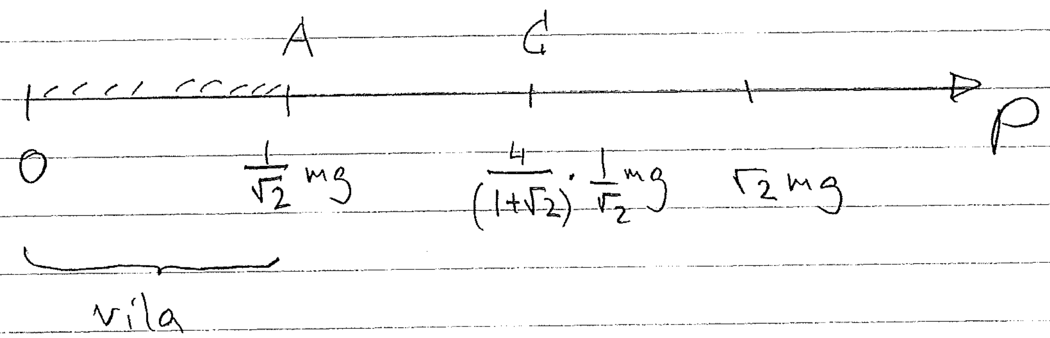
Dvs: $P \leq \frac{1}{\sqrt{2}}mg$ och $P \leq \sqrt{2}\,mg$

(A) $(N_A \geq 0)$

(**) ger

$$P\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\,2mg \quad , \quad N_c \geq 0 \quad (\text{ok})$$

Dvs $$P \leq \frac{4}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,mg \quad (G)$$

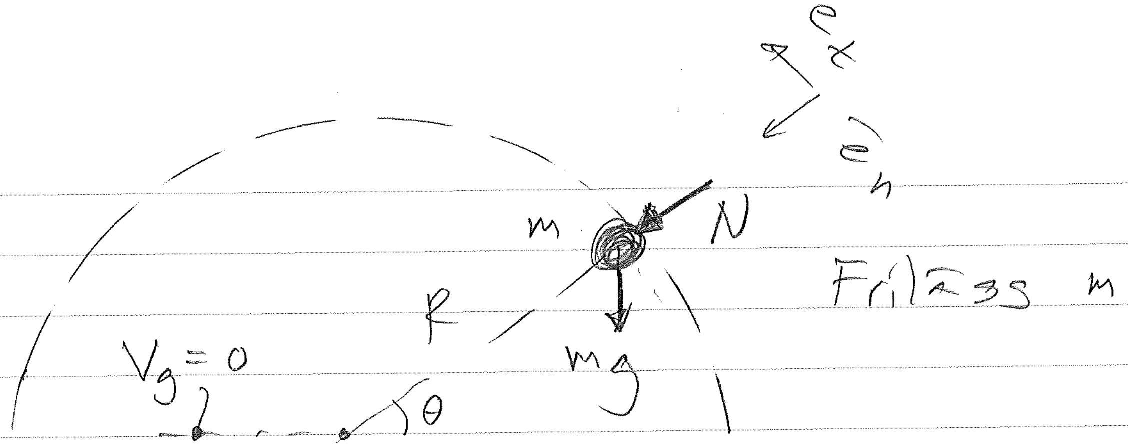


Således $$0 \leq P \leq \frac{1}{\sqrt{2}}mg$$

Dvs $$P_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}}mg$$

Gränsfallet uppnås vid A först.

4)



Frilägg m

Kinematik: $a_t = \ddot{s}$, $a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$

$\bar{e}_n$ ↙ $N + mg\sin\theta = m\frac{v^2}{R}$ (1)

$\bar{e}_t$ ↖ $-mg\cos\theta = m\ddot{s}$ (2)

(1) $N = -mg\sin\theta + m\frac{v^2}{R}$ (*)

Bestäm $v(\theta)$ mha $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\sin\theta - (-mg(R+\delta)) - \frac{1}{2}k\delta^2$

med $k = 16mg/R$ fås

$v^2(\theta) = \frac{16g}{R}\delta^2 - 2g\delta - 2gR - 2gR\sin\theta$ //

(*) ger $N = 16mg\frac{\delta^2}{R^2} - 2mg\frac{\delta}{R} - 2mg - 3mg\sin\theta$ //

Villkor: $N \geq 0 \; \forall \theta$ ger

$16mg\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 - 2mg\left(\frac{\delta}{R}\right) - 2mg \geq 3mg$

Vid gränsfallet likhet ($\theta = 90°$)

$$16\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{\delta}{R}\right) - 2 = 3$$

med $x = \frac{\delta}{R}$ fås ekv.

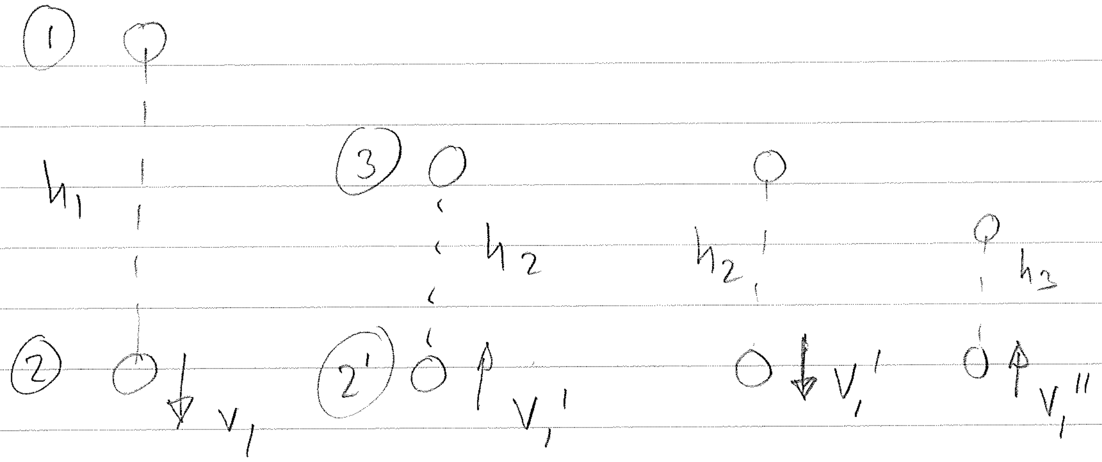
$$x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{5}{16} = 0$$

$$x = \frac{1}{16} \pm \sqrt{\frac{1}{16^2} + \frac{5}{16}}$$

$$x = \frac{1}{16} \pm \frac{9}{16} \qquad x_1 = \frac{5}{8}, \left(x_2 = -\frac{1}{2}\right)$$

Således: $\delta = \frac{5}{8} R$ //

5)

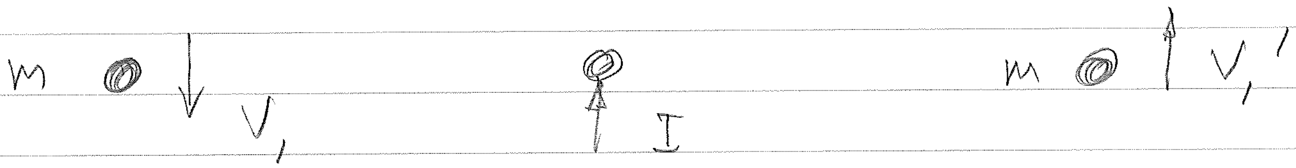


$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ (1)-(2) ger

$0 = \frac{1}{2} m v_1^2 - mgh_1 \quad , \quad v_1 = \sqrt{2gh_1}$

Första stöten

Före Under Efter



$\bar{I}^s = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$ för bollen

$\uparrow \quad I = m v_1' - m(-v_1) = m(v_1' + v_1)$

$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ (2')-(3) ger

$0 = -\frac{1}{2} m v_1'^2 + mgh_2 \quad , \quad v_1' = \sqrt{2gh_2}$

Ger a) $I = m\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right)$ //

Stöttalet

$$e = \frac{v_1' - 0}{0 - (-v_1)} = \frac{v_1'}{v_1}, \text{ ger}$$

b) $e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$ //

Andra stöten fås på samma sätt

$$e = \frac{v_1''}{v_1'} \text{ där } v_1'' = \sqrt{2gh_3}$$

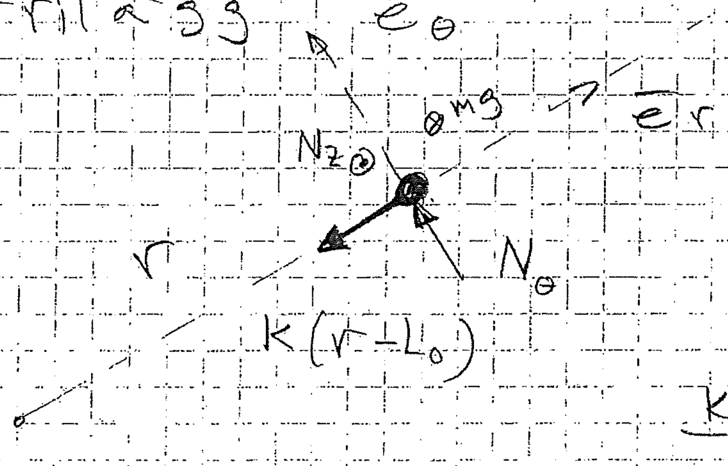
$$\text{och } v_1' = e v_1$$

Dvs $\sqrt{2gh_3} = e^2 v_1$ där $v_1 = \sqrt{2gh_1}$

$$\sqrt{2gh_3} = \left(\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\right)^2 \sqrt{2gh_1} \quad \text{ger}$$

c) $h_3 = \frac{h_2^2}{h_1}$ //

6) Frilägg



$\dot{\theta} = \omega = \text{konst.}$

Kinematik ($r-\theta$)

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

$a_z = 0$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$

$\bar{e}_r$: $-k(r-L_0) = m(\ddot{r} - r\omega^2)$ (1)

$\bar{e}_\theta$: $N_\theta = m(0 + 2\dot{r}\dot{\theta})$ (2)

$\bar{e}_z$: $N_z - mg = m \cdot 0$ (3)

(1) ger $\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) r = \frac{k}{m} L_0$ V.S.V

Ident. med

$$\ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$$

ger $\zeta = 0$, $\omega_n^2 = \frac{k}{m} - \omega^2$, $x_1 = \frac{kL_0}{m\omega_n^2}$

Har lösn, $r(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{kL_0}{m\omega_n^2}$

B.V. då $t = 0$

$r(0) = L_0$ ger $A + \frac{kL_0}{m\omega_n^2} = L_0$

$\dot{r}(0) = 0$ ger $B\omega_n = 0$

dvs $A = L_0\left(1 - \frac{k}{m\omega_n^2}\right)$; $B = 0$

Således:

$$r(t) = L_0\left(1 - \frac{k}{m\omega_n^2}\right)\cos\omega_n t + \frac{kL_0}{m\omega_n^2}$$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$ //

(2) ger $N_\theta = 2m\dot{r}\omega = -2m\omega\omega_n L_0\left(1 - \frac{k}{m\omega_n^2}\right)\sin\omega_n t$

(3) ger $N_z = mg$

$N = \sqrt{N_\theta^2 + m^2g^2}$ // där

$N_\theta = -2m\omega\omega_n L_0\left(1 - \frac{k}{m\omega_n^2}\right)\sin\omega_n t$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$