Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2018-01-05, kl 08.00-13.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal:

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 9.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivnings-tillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 8

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2018-01-05

Teoridel:

1a)
Masscentrum för en kropp definieras som bekant

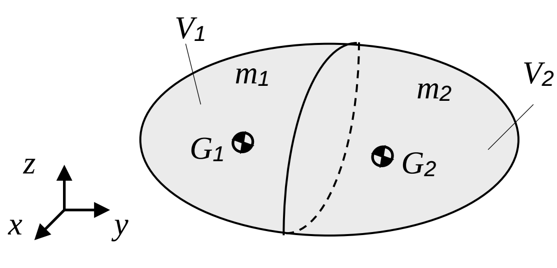
$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\int_V \boldsymbol{r}\rho \, dV}{\int_V \rho \, dV}, \text{ där } \rho = \text{densiteten}$$

Visa att masscentrum för en sammansatt kropp, bestående av delkropparna 1 och 2 i figuren, kan skrivas

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_{G1} + m_2 \boldsymbol{r}_{G2}}{m_1 + m_2}$$

där delkropparnas masscentrum utgörs av $\boldsymbol{r}_{G1}$ och $\boldsymbol{r}_{G2}$ och massorna är m_1 respektive m_2.

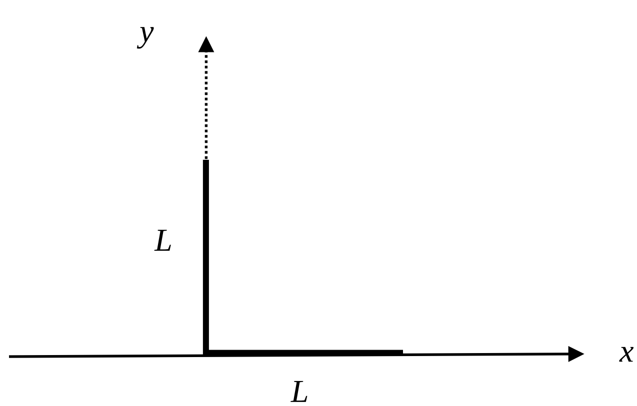
(1p)



1b)
Visa att masscentrums läge för en kropp som är sammansatt av två homogena och lika stänger med längden L som bildar en rät vinkel enligt figuren nedan ges av:

$$x_G = y_G = \frac{L}{4}$$

(1p)



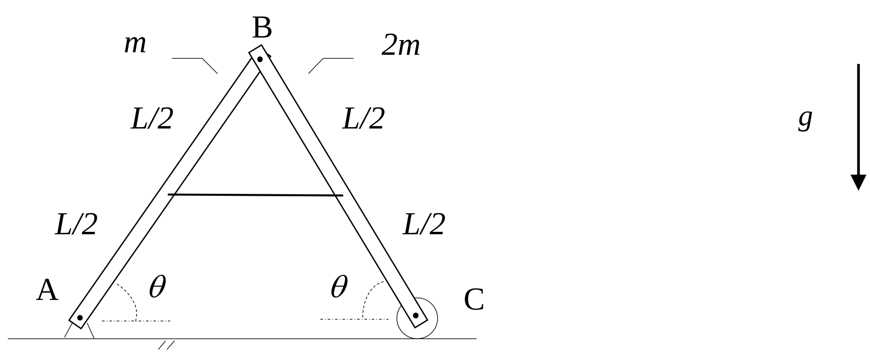
2)
Utgå från Newtons kraftlag $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ och definitionen av rörelsemängd $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$ och härled impulslagen för en partikel, dvs

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F}\, dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1 \qquad \text{(1p)}$$

Problemdel:

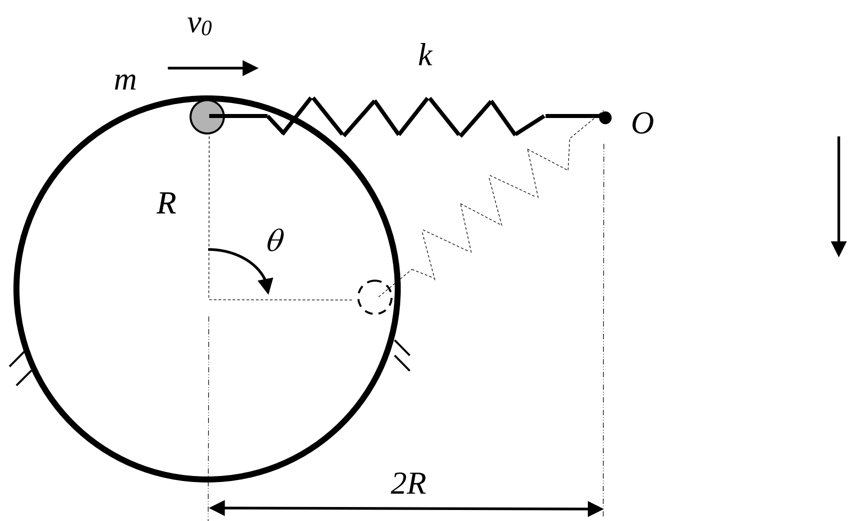
3)
Två homogena stänger AB och BC med längden *L* och massan *m* respektive *2m* är samman-kopplade enligt figur. Lederna A, B och rullen C är friktionsfria och stängerna lutar vinkeln θ mot horisontalplanet. Beräkna dragkraften i snöret som är fäst mellan stängerna i stängernas mittpunkt. Uttryck svaret som funktion av θ.

(3p)



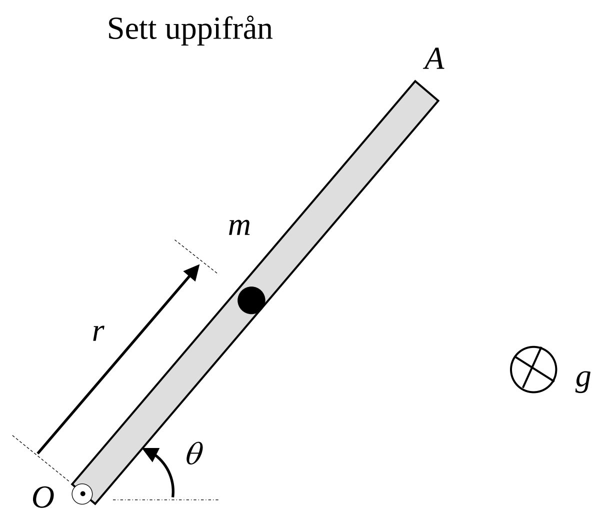
4)
En partikel med massan *m* kan friktionsfritt röra sig på insidan av en fix cirkel med radien *R* enligt figur. I partikeln är en fjäder med fjäderkonstanten *k* fäst, och fjäderns andra ände är fixerad vid O. När partikeln är i högsta punkten har den hastigheten $v_0 = \sqrt{8gR}$ och fjädern är då horisontell och har längden *2R*. Fjäderns ospända längd är L_0. Beräkna normalkraften från cirkeln på partikeln i det läge då vinkeln $\theta = \pi / 2$.
All rörelse sker i ett och samma vertikalplan och partikelns dimensioner kan försummas.
Låt $k = mg / R$ och $L_0 = R$ vid beräkningen.

(3p)



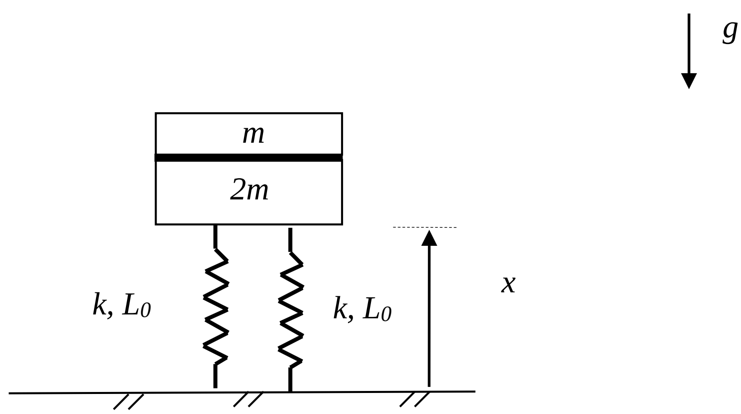
5)
En partikel med massan m kan friktionsfritt röra sig inuti ett <u>horisontellt</u> rör enligt figur. Röret är fixerat vid O och roterar moturs med konstant vinkelhastighet $\dot{\theta} = \omega$. Partikelns läge ges av (r, θ), där r är avståndet från O till partikeln och θ rörets rotationsvinkel, se figur. Vid tiden $t=0$ startas partikeln genom att ett snöre med längden r_0 mellan O och partikeln klipps av då $t=0$. Beräkna för den efterföljande rörelsen:

a) den horisontella normalkraften från röret på partikeln som funktion av tiden t (2p)
b) partikelns fart $|\mathbf{v}|$ som funktion av avståndet r. (1p)



6)
Ett svängande system består av två partiklar med massan m respektive $2m$ som är samman-fogade med en limfog. I den undre massan är två fjädrar fästa med fjäderkonstanten k och ospända längden L_0, se figur. Systemet startas genom att massorna ges en hastighet v_0 uppåt från läget $x = L_0$, dvs när båda fjädrarna är ospända. Beräkna kraften i limfogen mellan partiklarna som funktion av tiden för den efterföljande rörelsen, låt tiden $t = 0$ då systemet startas.

(3p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1,$ $\qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$

$\zeta = 1,$ $\qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1,$ $\qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1]om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1a) $$\bar{r}_G = \frac{\int_V \bar{r}\rho\,dV}{\int_V \rho\,dV} = \frac{\int_{V_1} \bar{r}\rho\,dV + \int_{V_2} \bar{r}\rho\,dV}{\int_{V_1} \rho\,dV + \int_{V_2} \rho\,dV}$$

men $\int_{V_1} \rho\,dV = m_1$, $\int_{V_2} \rho\,dV = m_2$ och

$$\bar{r}_{G_1} = \frac{\int_{V_1} \bar{r}\rho\,dV}{\int_{V_1} \rho\,dV} \quad \text{ger} \quad \int_{V_1} \bar{r}\rho\,dV = m_1 \bar{r}_{G_1}$$

$$\bar{r}_{G_2} = \frac{\int_{V_2} \bar{r}\rho\,dV}{\int_{V_2} \rho\,dV} \quad \text{ger} \quad \int_{V_2} \bar{r}\rho\,dV = m_2 \bar{r}_{G_2}$$

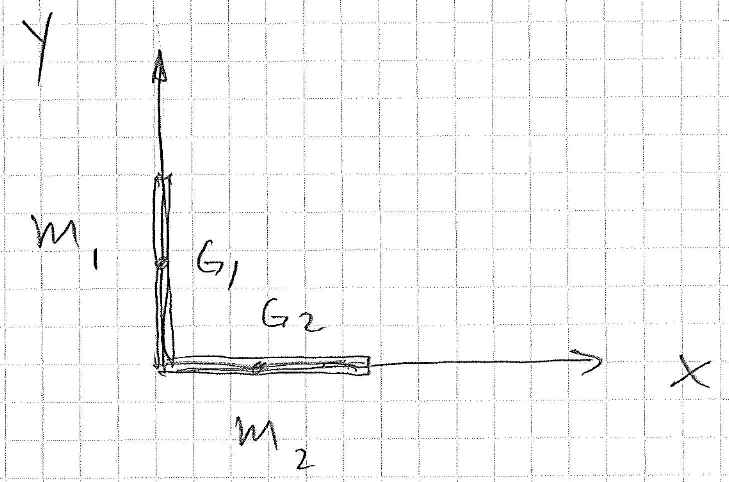
Dvs $$\bar{r}_G = \frac{m_1 \bar{r}_{G_1} + m_2 \bar{r}_{G_2}}{m_1 + m_2}$$ V.S.V.

//

1b) Ovan ger på komponentform

$$x_G = \frac{m_1 x_{G_1} + m_2 x_{G_2}}{m_1 + m_2}$$

$$y_G = \frac{m_1 y_{G_1} + m_2 y_{G_2}}{m_1 + m_2}$$



$$m_1 = m_2 = m \quad , \quad X_{G_1} = 0 \quad , \quad Y_{G_1} = \frac{L}{2}$$

$$X_{G_2} = \frac{L}{2} \quad , \quad Y_{G_2} = 0$$

Dvs $$X_G = \frac{m \cdot 0 + m\frac{L}{2}}{m+m} = \frac{L}{4} \quad \text{V.S.V}$$

$$Y_G = \frac{m \cdot \frac{L}{2} + m \cdot 0}{m+m} = \frac{L}{4} \quad \text{V.S.V}$$

<u>Alt.</u> Integrera fram X_G, Y_G från definitionen.

$\rho = \text{konst.} \quad dV = A\,dL$

$$\bar{r}_G = \frac{\int_V \bar{r}\rho\,dV}{\int_V \rho\,dV} = \frac{\int_L \bar{r}\,dL}{\int_L dL} \quad \text{ger}$$

$$X_G = \frac{\int_{L_1} x\,dL + \int_{L_2} x\,dL}{\int_{L_1} dL + \int_{L_2} dL} = \frac{\int_L^0 0 \cdot (-dy) + \int_0^L x\,dx}{L + L} = \frac{L}{4}$$

$Y_G = \frac{L}{4}$ på samma sätt

2) $$\Sigma \bar{F} = m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$$

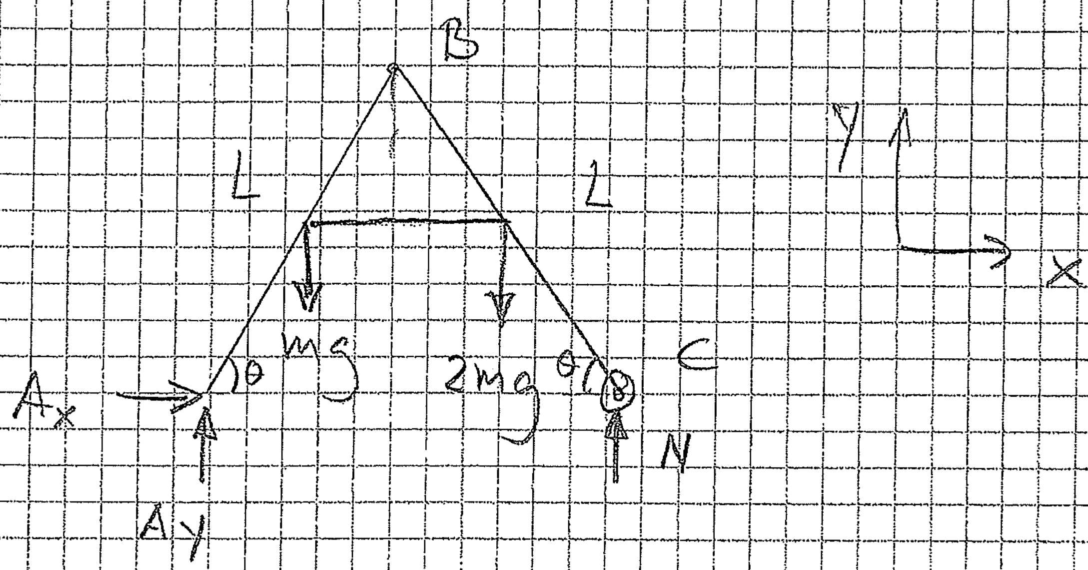
mult. med dt och integrera

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m\bar{v})\,dt \qquad \text{ger}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{F}\,dt = \left[m\bar{v}\right]_{t_1}^{t_2} = \underbrace{m\bar{v}(t_2)}_{\bar{G}_2} - \underbrace{m\bar{v}(t_1)}_{\bar{G}_1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{F}\,dt = \bar{G}_2 - \bar{G}_1 \qquad \text{V.S.V.}$$

3) Frilägg hela systemet

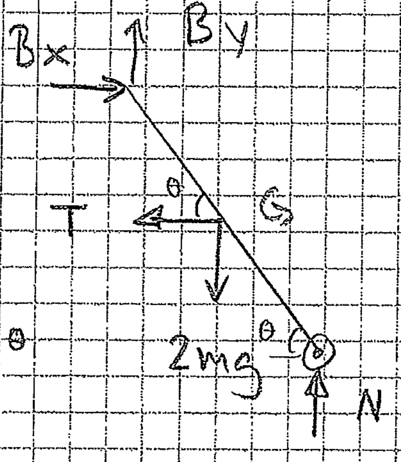


$\Sigma M_z = 0$ $\curvearrowleft A$ $N \cdot 2L\cos\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta$

$- 2mg \cdot \frac{3}{2}L\cos\theta = 0$

ger $N = \frac{7}{4}mg$ (1)

Frilägg BC



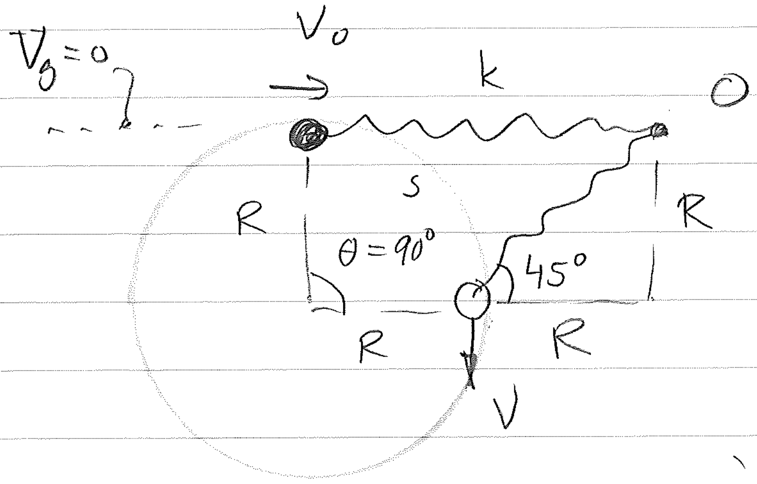
$\Sigma M_z = 0$

$\curvearrowleft B$ $-T\frac{L}{2}\sin\theta - 2mg\frac{L}{2}\cos\theta$

$+ N \cdot L\cos\theta = 0$

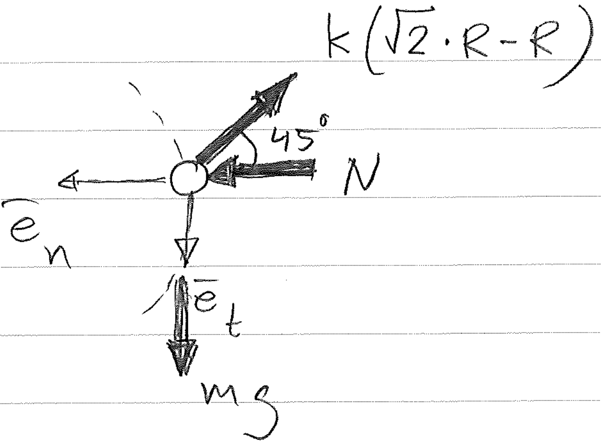
ger via (1) $T = \frac{3}{2}mg\cot\theta$

4)



$L_o = R$

$\dot{s} = v$



Frilägg då $\theta = 90°$

$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\bar{e}_n \leftarrow$ $$N - k(\sqrt{2} \cdot R - R) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = m\frac{v^2}{R} \quad (1)$$

$\bar{e}_t \downarrow$ $$mg - k(\sqrt{2} \cdot R - R) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = m\ddot{s} \quad (2)$$

Bestäm v då $\theta = 90°$ mha

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

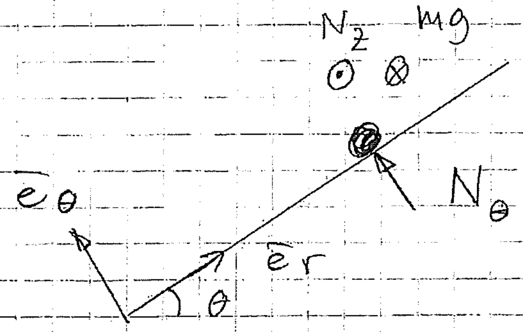
$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 - mgR + \frac{1}{2}k(\sqrt{2} \cdot R - R)^2 - \frac{1}{2}k(2R - R)^2$$

med $v_o = \sqrt{8gR}$ och $k = \frac{mg}{R}$ fås

$v^2 = gR(8 + 2\sqrt{2})$ och via (1) $\underline{\underline{N = mg\left(9 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)}}$ //

$\dot\theta = \omega = \text{konst}, \; \ddot\theta = 0$

5) Frilägg



Kinematik $(r-\theta)$

$\bar V = \dot r \bar e_r + r\dot\theta \bar e_\theta$
$= \dot r \bar e_r + r\omega \bar e_\theta$

$\bar a = (\ddot r - r\dot\theta^2)\bar e_r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\bar e_\theta$
$= (\ddot r - r\omega^2)\bar e_r + 2\dot r\omega \bar e_\theta$

$\Sigma \bar F = m\bar a$ ger

$\bar e_r$: ↗ $0 = m(\ddot r - r\omega^2)$ (1)

$\bar e_\theta$: ↖ $N_\theta = m2\dot r\omega$ (2)

$\bar e_z$: ⊙ $N_z - mg = m \cdot 0$

Bestäm $r(t)$ ur (1) $\ddot r - r\omega^2 = 0$

Kar. ekv. $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ ger $\lambda_1 = \omega$, $\lambda_2 = -\omega$

ger $r(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$, $\dot r(t) = C_1\omega e^{\omega t} - C_2\omega e^{-\omega t}$

B.V. $t=0$ $\begin{cases} r = r_0 & \text{ger } r_0 = C_1 + C_2 \\ \dot r = 0 & \text{ger } 0 = C_1\omega - C_2\omega \end{cases}$

dvs $C_1 = C_2 = \frac{r_0}{2}$, således:

$r(t) = \frac{r_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)$, $\dot r(t) = \frac{r_0}{2}\omega\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$

(2) ger $N_\theta(t) = m r_0 \omega^2 \left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$ //

$$|\bar{V}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\omega)^2} \qquad (*)$$

Bestäm $\dot{r}(r)$ via (1) $\ddot{r} = r\omega^2$

men $\ddot{r}\,dr = \dot{r}\,d\dot{r}$ $\left(\text{ty } \ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr}\dot{r}\right)$

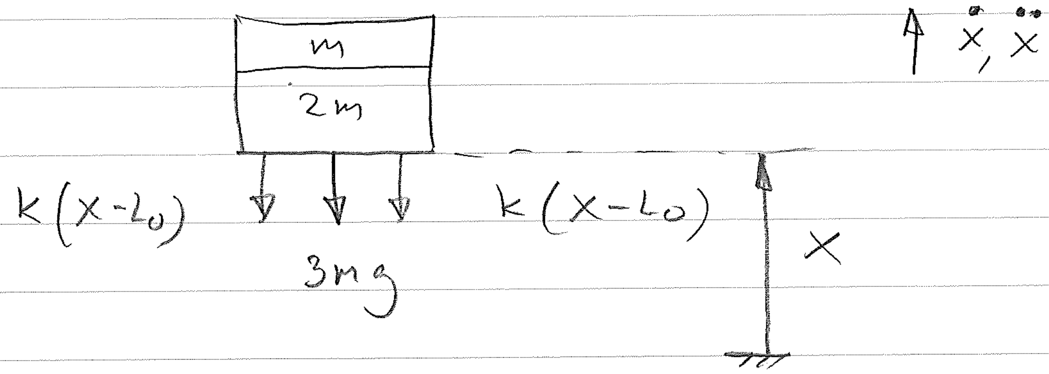
dvs $\int r\omega^2\,dr = \int \dot{r}\,d\dot{r}$ ger $\omega^2 \frac{r^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + C_1$

B.V. då $r = r_0$, $\dot{r} = 0$ ger $C_1 = \frac{\omega^2 r_0^2}{2}$

dvs $\dot{r}^2 = \omega^2(r^2 - r_0^2)$ ins i $(*)$ ger

$$|\bar{V}(r)| = \omega\sqrt{2r^2 - r_0^2} \qquad //$$

6) Frilägg systemet $3m$ först.



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$$\uparrow \quad -3mg - 2k(x - L_0) = 3m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = -g + \frac{2k}{3m}L_0$$

Ident. med $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$

ger $2\zeta\omega_n = 0$, $\omega_n^2 = \dfrac{2k}{3m}$,

$$\omega_n^2 x_1 = -g + \frac{2k}{3m}L_0$$

dvs $\zeta = 0$, $\omega_n = \sqrt{\dfrac{2k}{3m}}$, $x_1 = L_0 - \dfrac{3mg}{2k}$

$$x = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + L_0 - \frac{3mg}{2k}$$

där $\omega_n = \sqrt{\dfrac{2k}{3m}}$

B.V. då $t = 0$

$$x(0) = L_0 \iff L_0 = A + L_0 - \frac{3mg}{2k}$$

$$\dot{x}(0) = V_0 \iff V_0 = B\omega_n$$

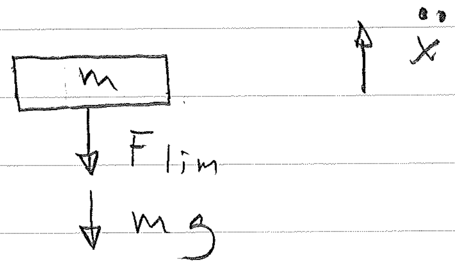
ger $A = \frac{3mg}{2k}$, $B = \frac{V_0}{\omega_n}$

Således:

$$x(t) = \frac{3mg}{2k}\cos\omega_n t + \frac{V_0}{\omega_n}\sin\omega_n t + L_0 - \frac{3mg}{2k} \qquad (*)$$

Bestäm $F_{lim}(t)$

Frilägg massan m



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$$\uparrow \quad -mg - F_{lim} = m\ddot{x}$$

$$F_{lim} = -mg - m\ddot{x} \qquad (**)$$

där $\ddot{x}$ fås ur $(*)$ (derivera 2 ggr)

$$\ddot{x} = -g\cos\omega_n t - V_0\sqrt{\frac{2k}{3m}}\sin\omega_n t$$

Ins. i (**) ger sedan

$$F_{lim}(t) = mg\left(\cos w_n t - 1\right) + mV_0\sqrt{\frac{2k}{3m}}\sin w_n t$$

där $w_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$ //