Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2017-10-19, kl 08.00-13.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: TER1, TER3, TERE,TERF

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 9.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivnings-tillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2017-10-19

Teoridel:

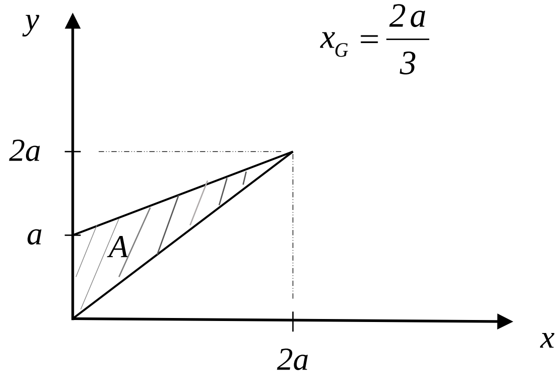
1)
Masscentrum definieras som bekant enligt nedan:

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\int_V \boldsymbol{r}\rho \, dV}{\int_V \rho \, dV}$$

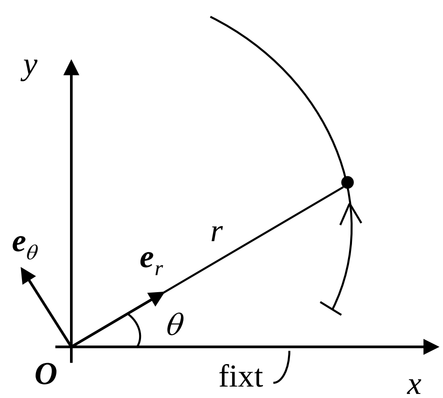
Utgå från definitionen ovan och visa att masscentrums läge i x-led för en tunn homogen plåt i form av en triangel med tjockleken t och arean A som begränsas av de räta linjerna samt av y-axeln i figuren nedan ges av:

(1p)

$$x_G = \frac{2a}{3}$$



2a)
En partikels bana i polära koordinater ges av $r = r(t)$ och $\theta = \theta(t)$ där t är tiden, se figur.



Visa att partikelns hastighetsvektor $\boldsymbol{v}$ i polära koordinater kan skrivas

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta$$

och att partikelns fart vid en cirkulär bana med radien R och ökande θ kan skrivas

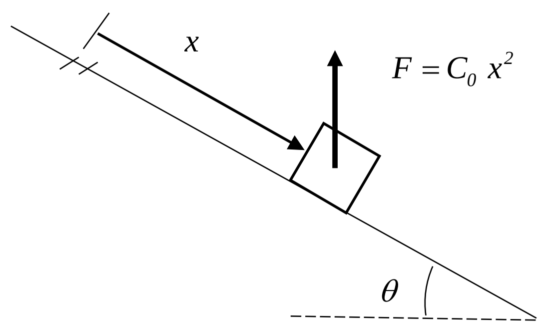
$$|\boldsymbol{v}| = R\,\dot{\theta} \qquad \text{(1p)}$$

2b)
Definitionen av arbetet som uträttas av en kraftvektor $\boldsymbol{F}$ under en förflyttning från läge $\boldsymbol{r}_1$ till $\boldsymbol{r}_2$ längs en kurva C lyder som bekant

$$U = \int_{\boldsymbol{r}_1, C}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{r}$$

Utgå från definitionen ovan och beräkna det arbete U som den vertikala kraften F uträttar på partikeln nedan när den bromsas in vid en rörelse nedför det lutande planet från $x = 0$ till $x = s$. Kraftens storlek varierar med x enligt $F = C_0\, x^2$ där C_0 är en given konstant och planet lutar en vinkel θ mot horisontalen. Koordinaten x är i meter och konstanten C_0 har enheten Newton/meter^2. Svaret får endast innehålla C_0, θ och s och partikeln är i kontakt med planet under hela rörelsen.

(1p)



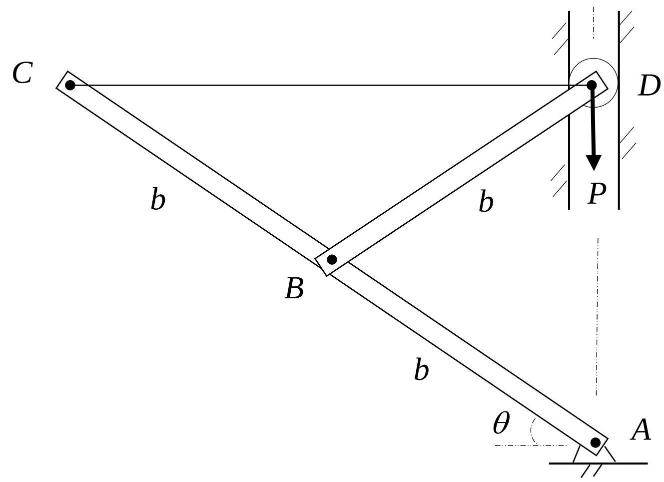
Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27, 2017-10-19

Problemdel:

3)
Två stänger *ABC* och *BD* är sammankopplade enligt figur, där ändpunkten *A* är fixerad i marken via en led och vid *D* är en rulle lagrad som är rörlig i ett vertikalt spår. Mellan punkterna *C* och *D* är ett horisontellt snöre fäst. På systemet appliceras sedan en given vertikal kraft *P* i rullens centrum, se figur. Beräkna dragkraften i snöret samt reaktionskraften vid *A*. Svara med beloppet. Stången *ABC* lutar vinkeln θ mot horisontalen och har längden *2b* och stången *BD* har längden *b*. Punkten *A* ligger rakt under *D*. Friktionen och delarnas massor kan försummas vid beräkningen.

(3p)

.

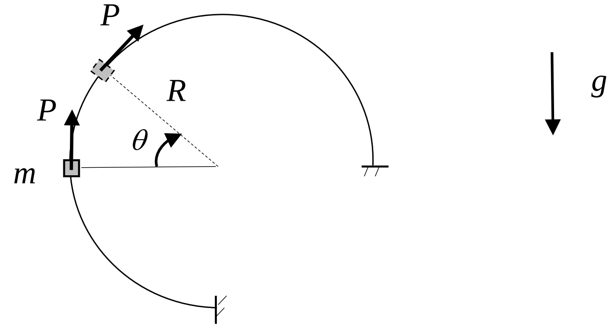


4)
En liten hylsa med massan *m* kan röra sig längs en stång som är böjd till en trekvarts cirkel med radien *R* enligt figur. På hylsan verkar en yttre drivande konstant kraft *P* som hela tiden är riktad i tangenten till cirkelbanan enligt figuren. Hylsan startar med hastigheten noll när den befinner sig vid läget $\theta = 0$. Låt kraften $P = 2mg$ och all friktion kan försummas och rörelsen sker i ett och samma vertikalplan.

a) Visa att sambandet $\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\left(2 - \cos\theta\right)$ gäller i intervallet $0 \le \theta \le \pi$.

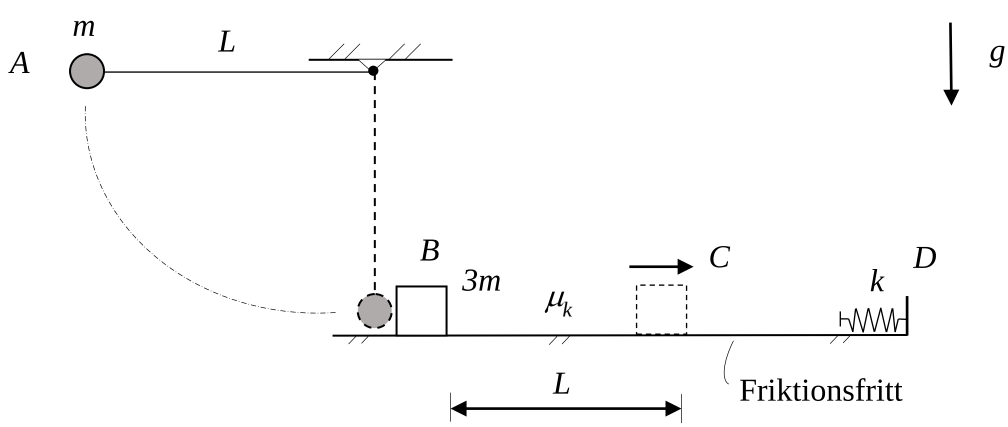
(1p)

b) Beräkna normalkraften från stången på partikeln som funktion av vinkeln θ i intervallet $0 \le \theta \le \pi$. (2p)



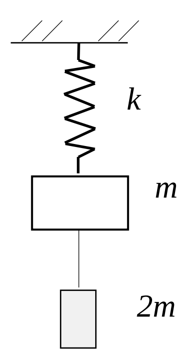
5)
En partikel A med massan m är fäst i ett snöre med längden L och bildar en pendel, se figur. Partikeln A släpps från vila då snöret är horisontellt och svänger sedan ned och träffar en annan stillastående partikel med massan $3m$ vid B. Efter stöten som sker med stöttalet e rör sig partikeln med massan $3m$ på ett horisontellt underlag en sträcka L fram till C där friktions-koefficienten är μ_k mellan B och C. Efter C kan friktionen försummas och partikeln bromsas sedan in med hjälp av en fjäder med fjäderkonstanten k vid D. Beräkna fjäderns maximala ihoptryckning. Låt stöttalet mellan partiklarna vara $e = \frac{1}{3}$ och friktionskoefficienten $\mu_k = \frac{1}{10}$.

(3p)



6)
Ett svängande system består av en fjäder med fjäderkonstanten k och två massor med massan m respektive $2m$, se figur. Den undre massan $2m$ är fäst i den övre massan m via ett snöre och fjäderns övre ände är fixerad i ett tak och den undre änden i massan m. Man släpper systemet från vila vid tiden $t = 0$ med sträckt snöre från det läge då fjädern har sin ospända längd L_0 och systemet får sedan svänga fritt.

a) Beräkna dragkraften i snöret som funktion av tiden t (2p)
b) Beräkna fjäderns maximala längd under rörelsen. (1p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$.
Homogena lösningen x_h ges av:

$$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$$

$$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$$

$$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$$

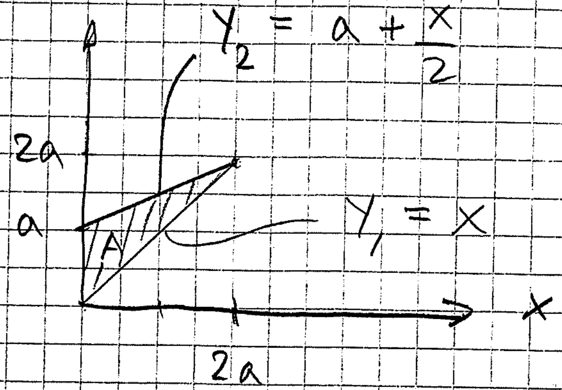
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1)



$dx\,dy$ - element

$dV = t\,dA$

$\rho, t =$ konst.

$$X_G = \frac{\int_V x\,\rho\,dV}{\int_V \rho\,dV} = \frac{\int_A x\,\rho\,t\,dA}{\int_A \rho\,t\,dA} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}$$

$$\int_A x\,dA = \int_A x\,dx\,dy = \int_0^{2a}\left[\int_x^{a+\frac{x}{2}} dy\right] x\,dx$$

$$= \int_0^{2a} \left[y\right]_x^{a+\frac{x}{2}} x\,dx = \int_0^{2a} \left(a + \frac{x}{2} - x\right) x\,dx$$

$$= \int_0^{2a} \left(ax - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[a\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} =$$

$$= \frac{2}{3}a^3 \quad //$$

$$\int_A dA = \int_A dx\,dy = \int_0^{2a}\left[\int_x^{a+\frac{x}{2}} dy\right] dx =$$

$$= \int_0^{2a} \left[y\right]_x^{a+\frac{x}{2}} dx = \int_0^{2a} \left(a + \frac{x}{2} - x\right) dx = \int_0^{2a} \left(a - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \left[ax - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{2a} = a^2 \quad //$$

$$X_G = \frac{2}{3}a^3 \Big/ a^2 = \frac{2}{3}a \quad //$$

V. S. V.

2a) $\bar{r} = r\bar{e}_r$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\bar{e}}_r$$

men $\begin{cases} \bar{e}_r = \cos\theta\,\bar{e}_x + \sin\theta\,\bar{e}_y \\ \bar{e}_\theta = -\sin\theta\,\bar{e}_x + \cos\theta\,\bar{e}_y \end{cases}$

ger $\dot{\bar{e}}_r = -\sin\theta \cdot \dot{\theta}\,\bar{e}_x + \cos\theta \cdot \dot{\theta}\,\bar{e}_y =$

$$= \dot{\theta}\,\bar{e}_\theta$$

dvs $\bar{v} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta$ V.S.V.

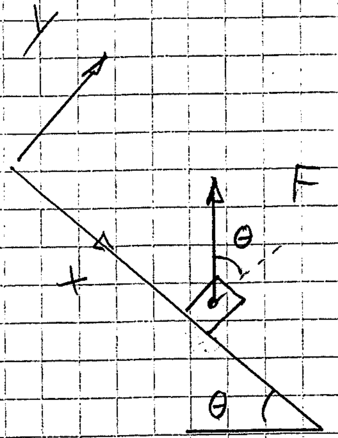
Vid cirkelbana med O i cirkelns centrum är $r = R =$ konst.

dvs $\dot{r} = 0$ ger

$$\bar{v} = R\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta \quad , \text{ där } \dot{\theta} > 0$$

och $|\bar{v}| = R\dot{\theta}$ partikelns fart V.S.V.

2b)



$F = G_0 x^2$

$\bar{F} = -F\sin\theta\,\bar{e}_x + F\cos\theta\,\bar{e}_y$

$\bar{r} = x\,\bar{e}_x \; ; \quad d\bar{r} = dx\,\bar{e}_x$

$$U = \int_{①}^{②} \bar{F} \circ d\bar{r} = \int_{①}^{②} (-F\sin\theta\,\bar{e}_x + F\cos\theta\,\bar{e}_y) \circ dx\,\bar{e}_x$$

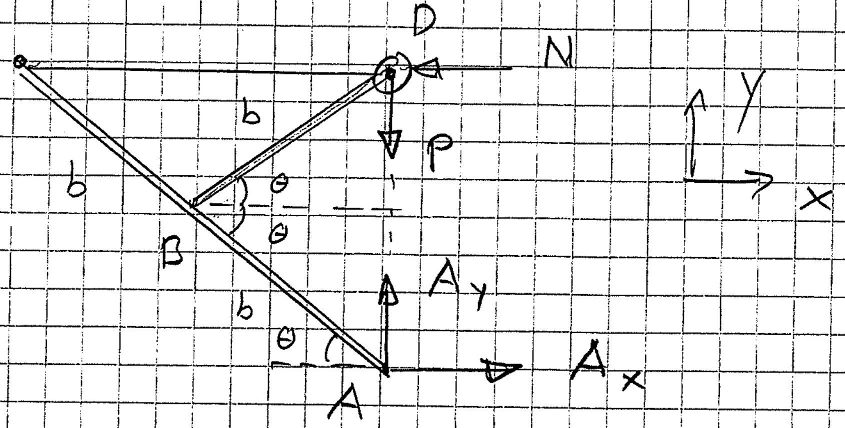
$$= \int_0^s -F\sin\theta\,dx = \int_0^s -G_0 x^2 \sin\theta\,dx$$

$$= -G_0 \sin\theta \int_0^s x^2\,dx = -G_0 \sin\theta \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^s =$$

$$= -G_0 \sin\theta \cdot \frac{s^3}{3}$$

Dvs $\quad U = -\frac{1}{3} G_0 \sin\theta \cdot s^3 \quad //$

3) Frilägg systemet



$\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$ ger

$\rightarrow$ $A_x + N = 0$ (1)

$\uparrow$ $A_y - P = 0$ (2)

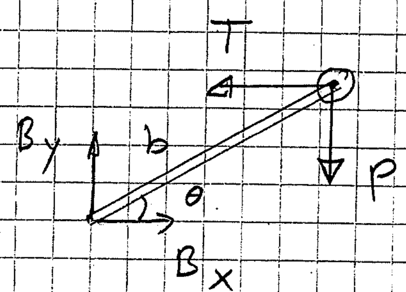
$\curvearrowleft A$ $N \cdot 2b \sin\theta = 0$ (3)

(1), (2), (3) ger $N = 0$ och

$A_x = 0$

$A_y = P$ //

Frilägg BD ($N = 0$)



$\rightarrow$ $B_x - T = 0$ (4)

$\uparrow$ $B_y - P = 0$ (5)

$\curvearrowleft B$ $T\, b \sin\theta - P \cdot b \cos\theta = 0$ (6)

(6) ger $T = P \frac{1}{\tan\theta}$ eller

$$T = P\cot\theta \quad //$$

Således: $|\bar{F}_A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = P$

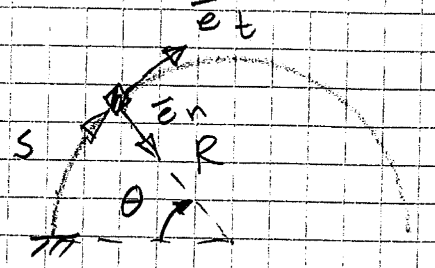
$$T = P\cot\theta$$

//

<u>Villkor:</u> $T \geq 0$ (dragkraft) ok

4) Kinematik (n-t)

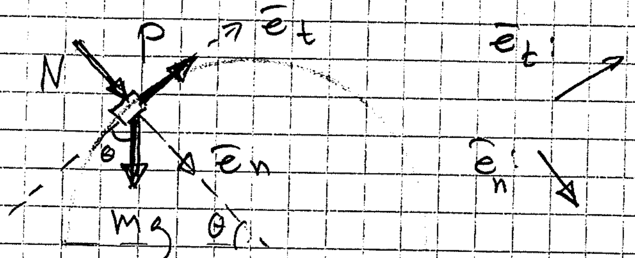
Cirkelbana $\rho = R$, $s = R\theta$



$$a_t = \ddot{s} = R\ddot{\theta}$$

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{(R\dot{\theta})^2}{R} = R\dot{\theta}^2$$

Frilägg hylsan $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger



$$P - mg\cos\theta = mR\ddot{\theta} \quad (1)$$

$$N + mg\sin\theta = mR\dot{\theta}^2 \quad (2)$$

Med $P = 2mg$ ger (1)

$$2mg - mg\cos\theta = mR\ddot{\theta} \quad \text{dvs}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}(2 - \cos\theta) \quad \text{V.S.V.} \quad //$$

(2) ger $N = mR\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta \quad (*)$

Bestäm $\dot{\theta}(\theta)$

Vi har $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta}$ eller

$$\ddot{\theta}\,d\theta = \dot{\theta}\,d\dot{\theta}$$

$$\int \frac{g}{R}(2-\cos\theta)\,d\theta = \int \dot{\theta}\,d\dot{\theta}$$

$$\frac{g}{R}(2\theta - \sin\theta) = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + C$$

B.V. då $\theta = 0$ är $\dot{\theta} = 0$ $\quad (\dot{s} = R\dot{\theta} = 0)$

ger $C = 0$, dvs

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(2\theta - \sin\theta)$$ ins. i (*) ger

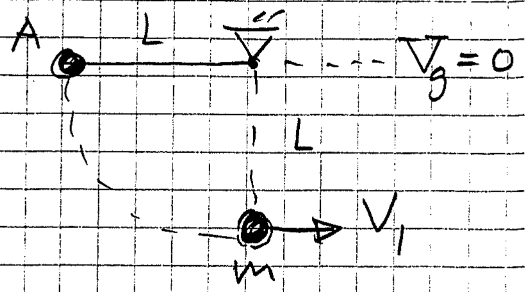
$$N = mg(4\theta - 3\sin\theta) \quad //$$

5) • Bestäm hastigheten före stöten

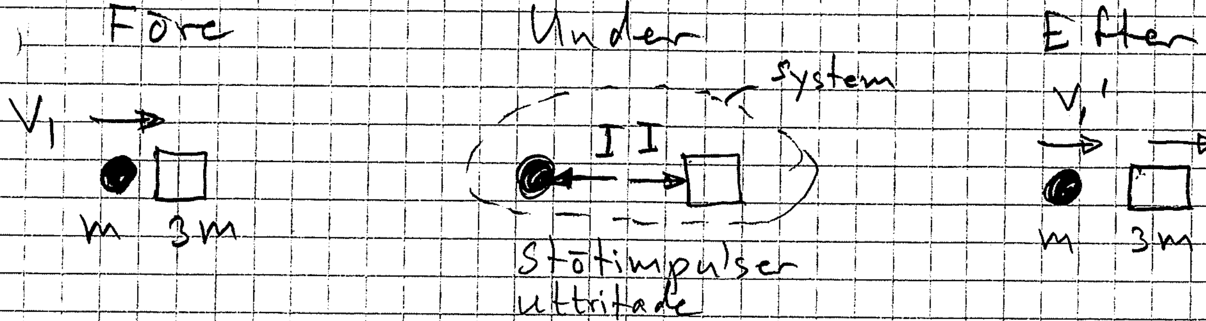
$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \quad \text{ger } A - B$$

$$0 = \frac{1}{2} m v_1^2 - mgL$$

$$v_1 = \sqrt{2gL} \quad (1)$$



• Stöten



$$\bar{I}_s = \bar{G}_2 - \bar{G}_1 \; ; \; \bar{G} = m\bar{v} \quad \text{för systemet}$$

$$\xrightarrow{} \quad 0 = m v_1' + 3m v_2' - (m \cdot v_1 + 3m \cdot 0)$$

Stöttalet $e = \dfrac{v_2' - v_1'}{v_1 - 0} = \dfrac{1}{3}$

ger $v_1' + 3v_2' = v_1$ (2)

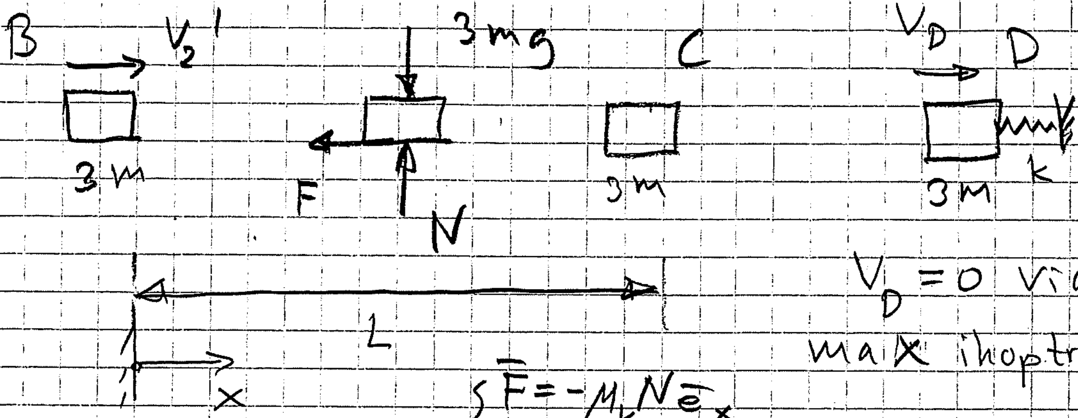
$v_2' - v_1' = \frac{1}{3} v_1$ (3)

(2), (3) har lösn. $v_1' = 0$

$v_2' = \frac{1}{3} v_1$

- Rörelsen B – C – D

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_g$$



$V_D = 0$ vid max ihoptryckn. δ

$$\begin{cases} \bar{F} = -\mu_k N \bar{e}_x \\ d\bar{r} = dx\,\bar{e}_x \end{cases} ; \quad N = 3mg$$

$$U_{B-C} = \int_B^C \bar{F} \circ d\bar{r} = \int_0^L -\mu_k N\,dx = -\mu_k 3mgL$$

$$U_{C-D} = 0 \quad \text{(ingen friktion)}$$

Dvs $\quad U = U_{B-C} + U_{C-D} = -\mu_k 3mgL \quad (B-D)$

$$\Delta T = \frac{1}{2} 3m \underbrace{V_D^2}_{=0} - \frac{1}{2} 3m V_2'^2 = -\frac{1}{2} 3m V_2'^2$$

$$\Delta V_g = 0$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} k \delta^2 - 0$$

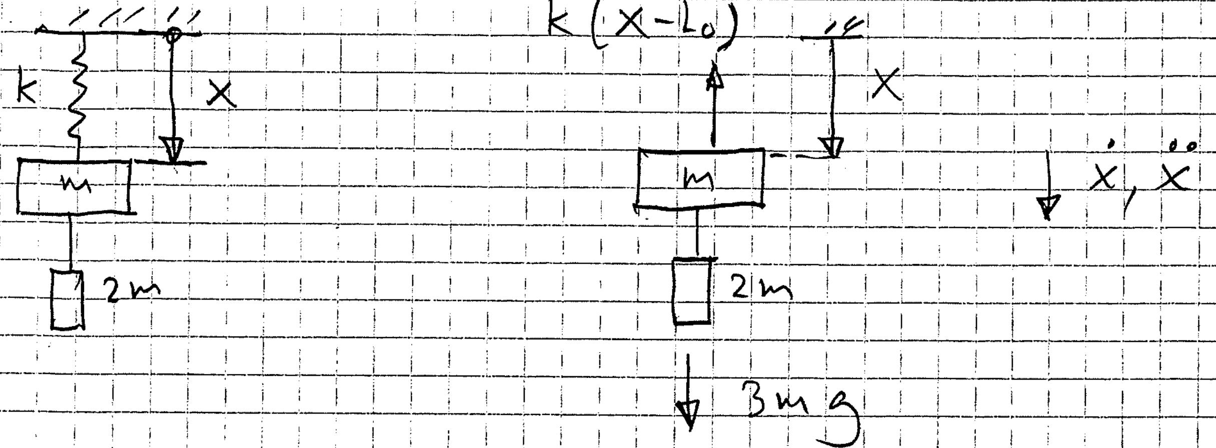
Ger $\quad -\mu_k 3mgL = -\frac{1}{2} 3m V_2'^2 + \frac{1}{2} k \delta^2$

med $\quad V_2' = \frac{1}{3} V_1 \overset{(1)}{=} \frac{1}{3}\sqrt{2gL} \quad$ och $\quad \mu_k = \frac{1}{10} \quad$ fås

$$-\frac{1}{10} 3mgL = -\frac{1}{2} 3m \cdot \frac{1}{9} \cdot 2gL + \frac{1}{2} k \delta^2$$

Ger $\quad \delta = \sqrt{\dfrac{mgL}{15k}} \quad //$

6) Bestäm $x(t)$ genom att frilägga systemet $m+2m$ först.



$\sum \bar{F} = m\bar{a}$ ger $\downarrow$ $3mg - k(x-L_0) = 3m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{k}{3m}x = g + \frac{k}{3m}L_0 \quad (1)$$

Ident. med $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$

$$2\zeta\omega_n = 0, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{3m}, \quad \omega_n^2 x_1 = g + \frac{k}{3m}L_0$$

ger $\zeta = 0$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{3m}}$, $x_1 = \frac{3mg}{k} + L_0$

Dvs (1) har lösningen

$$x = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{3mg}{k} + L_0$$

B.V. då $t=0$

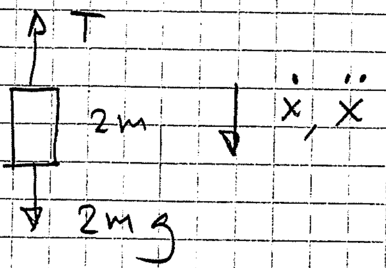
$x(0) = L_0$ ger $A = -\frac{3mg}{k}$

$\dot{x}(0) = 0$ ger $B = 0$

Således $x(t) = -\frac{3mg}{k}\cos w_n t + \frac{3mg}{k} + L_0$

där $w_n = \sqrt{\frac{k}{3m}}$

Frilägg 2m



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger $\downarrow$ $2mg - T = 2m\ddot{x}$

där $\ddot{x} = \frac{3mg}{k} w_n^2 \cos w_n t = g \cos w_n t$

ger $T(t) = 2mg(1 - \cos w_n t)$ //

$w_n = \sqrt{\frac{k}{3m}}$, $T \geq 0 \; \forall t$

Max längd fås vid vändläget då $\dot{x} = 0$

$\dot{x} = \frac{3mg}{k} w_n \sin w_n t = 0$; $\sin w_n t = 0$

$w_n t = \pi$ vid första vändläget efter start.

Dvs då $t = \frac{\pi}{w_n}$ och $x\left(\frac{\pi}{w_n}\right) = \frac{6mg}{k} + L_0$

Således $L_{max} = \frac{6mg}{k} + L_0$ //