Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2017-01-04, kl 8.00-13.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal:

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 9.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivnings-tillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 7

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2017-01-04

Teoridel:

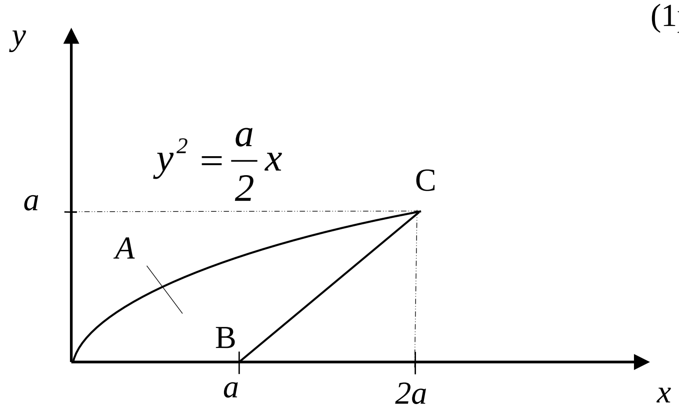
1)
Masscentrum för en kropp definieras som bekant enligt nedan:

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\int_V \boldsymbol{r}\rho\, dV}{\int_V \rho\, dV}$$

Betrakta en tunn homogen plåt med tjockleken t och där arean A begränsas av kurvan $y^2 = \frac{a}{2}x$ och x-axeln samt linjen BC, enligt figuren. Visa att plåtens masscentrum i x-led ges av uttrycket

$$x_G = \frac{23}{25}a$$

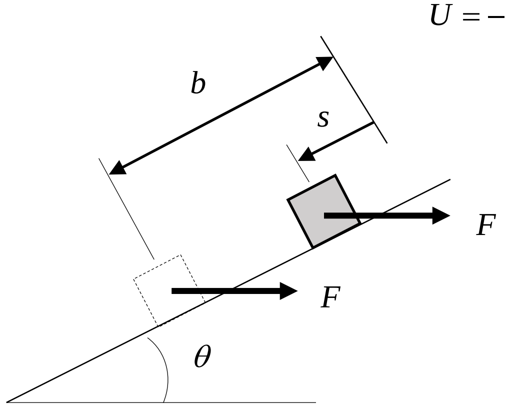
(1p)



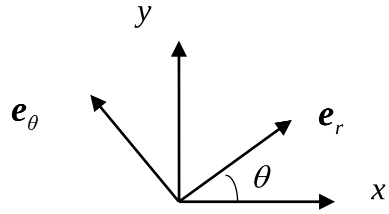
2a)
En partikel rör sig nedför ett lutande plan med lutningsvinkel θ enligt figur. Partikeln bromsas upp med hjälp av en horisontell kraft F vars storlek ökar linjärt med koordinaten s längs planet enligt formen $F = cs$ där c är en given konstant. Om partikeln förflyttat sig en sträcka b nedför planet, visa att kraften F då uträttat nedanstående arbete på partikeln

$$U = -\frac{b^2 c}{2}\cos\theta$$

(1p)



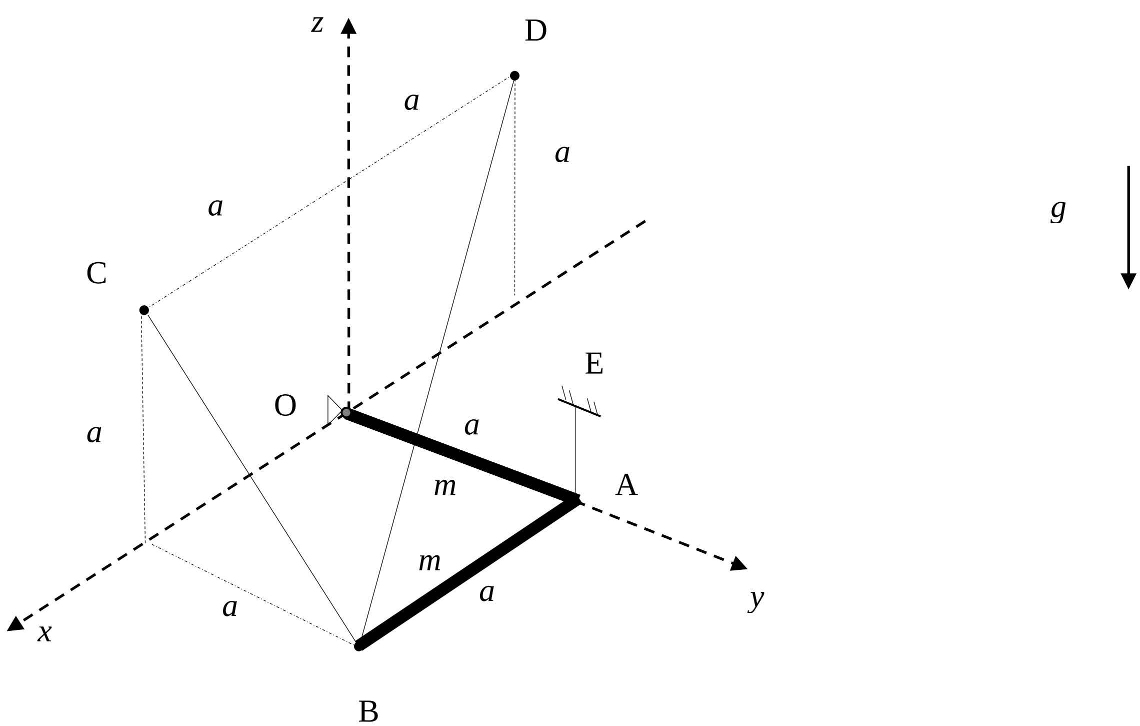
2b)
Givet de polära enhetsvektorerna $\boldsymbol{e}_r$ och $\boldsymbol{e}_\theta$. Visa att deras tidsderivator $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$ och $\dot{\boldsymbol{e}}_\theta$ kan skrivas som $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta$ och $\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_r$. Systemet *xy* är fixt. (1p)



Problemdel:

3)
En homogen kropp OAB är sammansatt av två stänger OA och AB som bildar en rät vinkel och befinner sig i jämvikt i *xy*-planet enligt figur. Delen OA respektive AB har längden *a* och massan *m* vardera. Stångens ände O är fäst i en friktionsfri kulled och vid A är ett vertikalt snöre AE fäst där E är fixerat i ett horisontellt tak. Vid änden B är två snören BC och BD fästa och dessa är fixerade vid C respektive D i *xz*-planet. Beräkna storleken av dragkraften i snöret AE, BC samt BD. Geometri enligt figuren.

(3p)

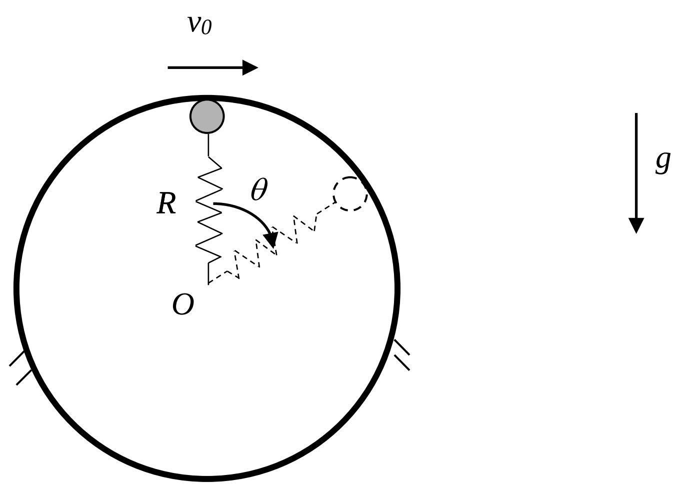


.

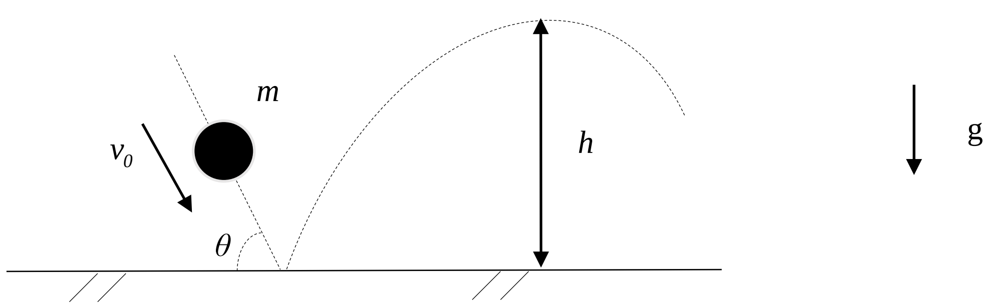
4)
En partikel med massan m kan friktionsfritt röra sig på insidan av ett fixt cirkulärt rör med radien R enligt figur. Partikeln pressas mot rörets insida via en fjäder som är lagrad i rörets medelpunkt O. Fjädern har fjäderkonstanten $k = 2mg/R$ och den ospända längden $L_0 = 2R$. När partikeln är i högsta punkten har den hastigheten $v_0 = \sqrt{8gR}$ och all rörelse sker i ett och samma vertikalplan.

a) Beräkna normalkraften från röret på partikeln som funktion av vinkeln θ.
(2p)

b) Beräkna partikelns tangentiella acceleration a_t som funktion av θ.
(1p)

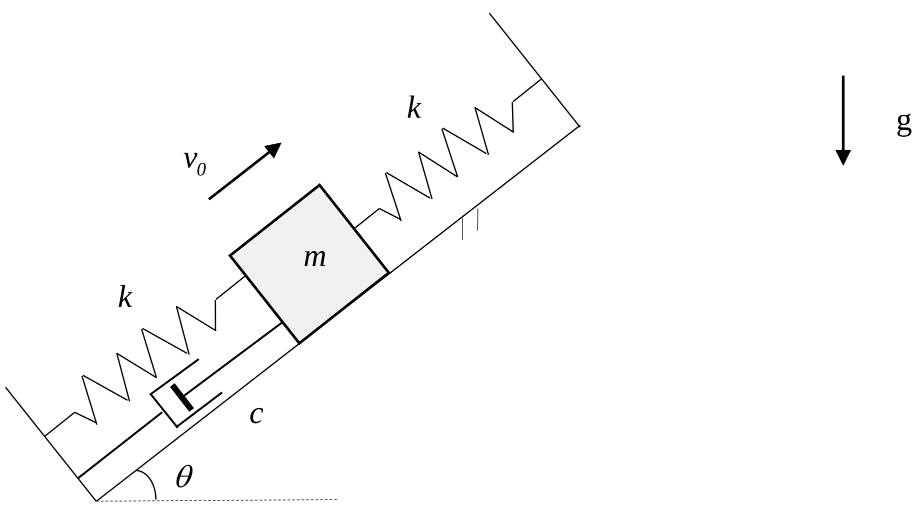


5)
En liten boll med massan m har hastigheten v_0 i riktningen θ precis innan den träffar ett glatt horisontellt underlag enligt figuren. Beräkna stötimpulsen från underlaget på partikeln samt den maximala höjd h som partikeln uppnår vid rörelsen efter stöten. Stöttalet är $e = 1/2$ och luftmotståndet kan försummas vid beräkningen. Låt vinkeln $\theta = 60$ grader.
(3p)



6)
En kloss med massan m kan friktionsfritt röra sig längs ett lutande plan med lutningsvinkeln θ enligt figur. I klossen är två likadana fjädrar med fjäderkonstanten k fästa. Man har även applicerat en dämpare med dämpkonstanten c. Systemet startas vid tiden $t = 0$ genom att man ger massan en hastighet v_0 uppför planet i det läge då båda fjädrarna är ospända. Fjädrarna har den ospända längden L_0 och dämpkonstanten har värdet $c = \sqrt{8km}$. Beräkna den övre fjäderns längd som funktion av tiden för den efterföljande rörelsen.

(3p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{\left|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}\right|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$. Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1,$ $\qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$

$\zeta = 1,$ $\qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1,$ $\qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

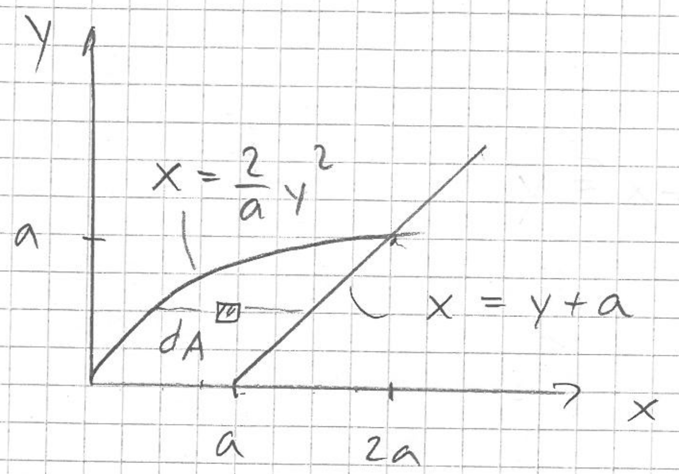
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1)



$$x_G = \frac{\int_V x \rho \, dV}{\int_V \rho \, dV} \; ; \qquad dV = t \, dA \, , \quad \rho = \text{konst.}$$

$$x_G = \frac{\rho t}{\rho t} \frac{\int_A x \, dA}{\int_A dA} = \frac{\int_A x \, dA}{\int_A dA} \; ; \qquad dA = dy\,dx$$

$$\int_A x \, dA = \int_A x \, dx\,dy = \int_0^a \left[\int_{\frac{2}{a}y^2}^{y+a} x \, dx \right] dy$$

$$= \int_0^a \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{2}{a}y^2}^{y+a} dy = \int_0^a \frac{1}{2} \left((y+a)^2 - \frac{4}{a^2} y^4 \right) dy$$

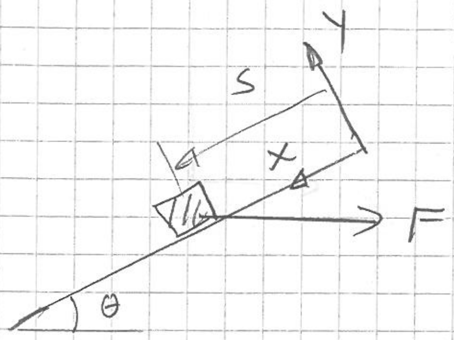
$$= \int_0^a \frac{1}{2} \left(y^2 + a^2 + 2ay - \frac{4}{a^2} y^4 \right) dy = \frac{23}{30} a^3 \; //$$

$$\int_A dA = \int_A dx\,dy = \int_0^a \left[\int_{\frac{2}{a}y^2}^{y+a} dx \right] dy =$$

$$= \int_0^a \left[x \right]_{\frac{2}{a}y^2}^{y+a} dy = \int_0^a \left(y + a - \frac{2}{a} y^2 \right) dy = \frac{5}{6} a^2 \; //$$

$$x_G = \frac{23}{30} a^3 \Big/ \frac{5}{6} a^2 = \frac{23}{25} a \quad \text{V.S.V.}$$

2a)



$$\bar{F} = -F\cos\theta\,\bar{e}_x - F\sin\theta\,\bar{e}_y$$

$$\bar{r} = s\,\bar{e}_x$$

$$d\bar{r} = ds\,\bar{e}_x$$

$$U = \int_{(1)}^{(2)} \bar{F} \circ d\bar{r} = \int_0^b -F\cos\theta\, ds =$$

$$= \int_0^b - c \cdot s \cdot \cos\theta\, ds = -c \cdot \cos\theta \int_0^b s\,ds$$

$$= -\ c \cdot \cos\theta \cdot \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^b = -c \cdot \cos\theta\, \frac{b^2}{2}$$

Dvs $\quad U = -\dfrac{b^2 c}{2}\cos\theta \quad$ V.S.V.

2b) $\bar{e}_r = \cos\theta\, \bar{e}_x + \sin\theta\, \bar{e}_y$

$\bar{e}_\theta = -\sin\theta\, \bar{e}_x + \cos\theta\, \bar{e}_y$

$\dot{\bar{e}}_r = -\sin\theta \cdot \dot{\theta}\, \bar{e}_x + \cos\theta \cdot \dot{\theta}\, \bar{e}_y$

$\dot{\bar{e}}_\theta = -\cos\theta \cdot \dot{\theta}\, \bar{e}_x - \sin\theta \cdot \dot{\theta}\, \bar{e}_y$

eller $\dot{\bar{e}}_r = \dot{\theta}\left(-\sin\theta\, \bar{e}_x + \cos\theta\, \bar{e}_y\right) = \dot{\theta}\, \bar{e}_\theta$

$\dot{\bar{e}}_\theta = -\dot{\theta}\left(\cos\theta\, \bar{e}_x + \sin\theta\, \bar{e}_y\right) = -\dot{\theta}\, \bar{e}_r$

dvs. $\dot{\bar{e}}_r = \dot{\theta}\, \bar{e}_\theta$

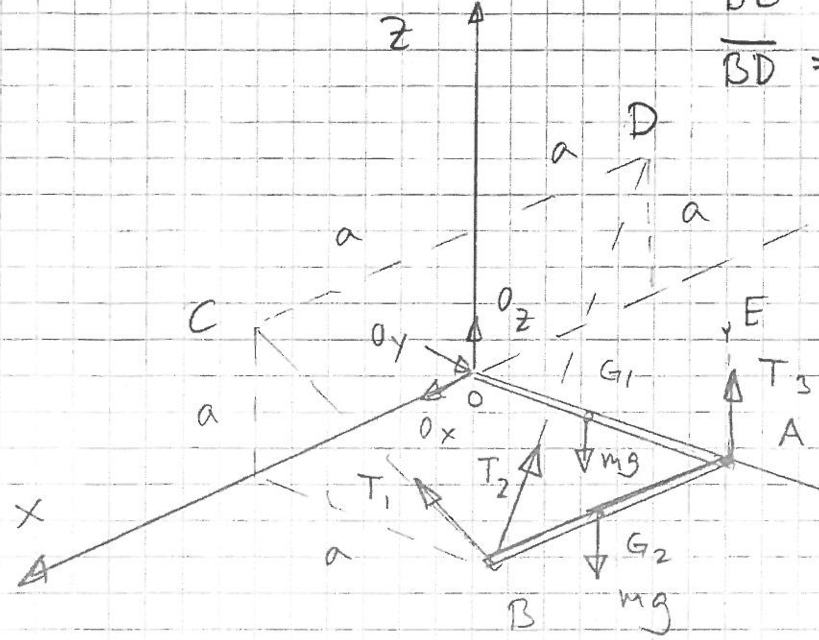
$\dot{\bar{e}}_\theta = -\dot{\theta}\, \bar{e}_r$ V.S.V.

3) Frilägg OAB

$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = -a\bar{e}_y + a\bar{e}_z$

$\overline{BD} = \overline{OD} - \overline{OB} =$

$= -2a\bar{e}_x - a\bar{e}_y + a\bar{e}_z$



$|\overline{BC}| = \sqrt{2} \cdot a$

$|\overline{BD}| = \sqrt{6} \cdot a$

$$\overline{T}_1 = T_1 \bar{e}_{BC} = T_1 \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} = T_1 \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\bar{e}_y + \bar{e}_z\right)$$

$$\overline{T}_2 = T_2 \bar{e}_{BD} = T_2 \frac{\overline{BD}}{|\overline{BD}|} = T_2 \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-2\bar{e}_x - \bar{e}_y + \bar{e}_z\right)$$

$$\overline{T}_3 = T_3 \bar{e}_{AE} = T_3 \bar{e}_z \quad ; \quad m\bar{g} = -mg\,\bar{e}_z$$

$\overline{M}^O = \bar{0}$ ger

$$\overline{OG}_1 \times m\bar{g} + \overline{OG}_2 \times m\bar{g} + \overline{OA} \times \overline{T}_3 +$$

$$+ \overline{OB} \times \overline{T}_1 + \overline{OB} \times \overline{T}_2 = \bar{0}$$

där $\overline{OG}_1 = \frac{a}{2}\bar{e}_y$; $\overline{OG}_2 = \frac{a}{2}\bar{e}_x + a\bar{e}_y$

$\overline{OA} = a\bar{e}_y$; $\overline{OB} = a\bar{e}_x + a\bar{e}_y$

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{a}{2} & a & 0 \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ a & a & 0 \\ 0 & -\frac{T_1}{\sqrt{2}} & \frac{T_1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ a & a & 0 \\ -\frac{2T_2}{\sqrt{6}} & -\frac{T_2}{\sqrt{6}} & \frac{T_2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = \bar{0}$$

$$\bar{e}_x \left(-\frac{a}{2}mg - amg + aT_3 + a\frac{T_1}{\sqrt{2}} + a\frac{T_2}{\sqrt{6}} \right) +$$

$$\bar{e}_y \left(\frac{a}{2}mg - a\frac{T_1}{\sqrt{2}} - a\frac{T_2}{\sqrt{6}} \right) +$$

$$+ \bar{e}_z \left(-a\frac{T_1}{\sqrt{2}} + a\frac{T_2}{\sqrt{6}} \right) = \bar{0}$$

x: led $-\frac{3}{2}amg + aT_3 + \frac{T_1}{\sqrt{2}} + \frac{T_2}{\sqrt{6}} = 0$ (1)

y: led $\frac{a}{2}mg - a\frac{T_1}{\sqrt{2}} - \frac{aT_2}{\sqrt{6}} = 0$ (2)

z: led $-a\frac{T_1}{\sqrt{2}} + a\frac{T_2}{\sqrt{6}} = 0$ (3)

(1) -- (3) ger $T_1 = mg\frac{\sqrt{2}}{4}$

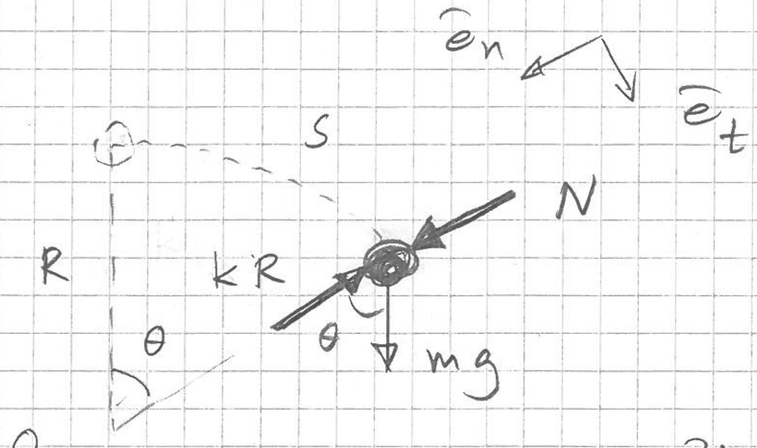
$$T_2 = mg\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$T_3 = mg$$

//

($T_1 \geq 0$, $T_2 \geq 0$, $T_3 \geq 0$ ok)

4) Frilägg



Kinematik

$$a_t = \ddot{s}$$

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}$$

$$k = \frac{2mg}{R}, \quad L_0 = 2R$$

$$\sum \bar{F} = m\bar{a}$$

$\bar{e}_n$: ↙ $\quad N - kR + mg\cos\theta = m\dfrac{v^2}{R}$

$\bar{e}_t$: ↘ $\quad mg\sin\theta = m a_t$

ger $\quad N = m\dfrac{v^2}{R} + kR - mg\cos\theta \qquad (1)$

$$a_t = g\sin\theta \qquad (2)$$

Bestäm $v(\theta)$, $\quad U = \Delta T + \Delta V_s + \Delta V_e \quad$ ger

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 - mg(R - R\cos\theta) + 0$$

dvs $\quad v^2 = v_0^2 + 2gR(1-\cos\theta)$, Ekv. (1) ger
med $k = 2mg/R$, $v_0 = \sqrt{8gR}$:

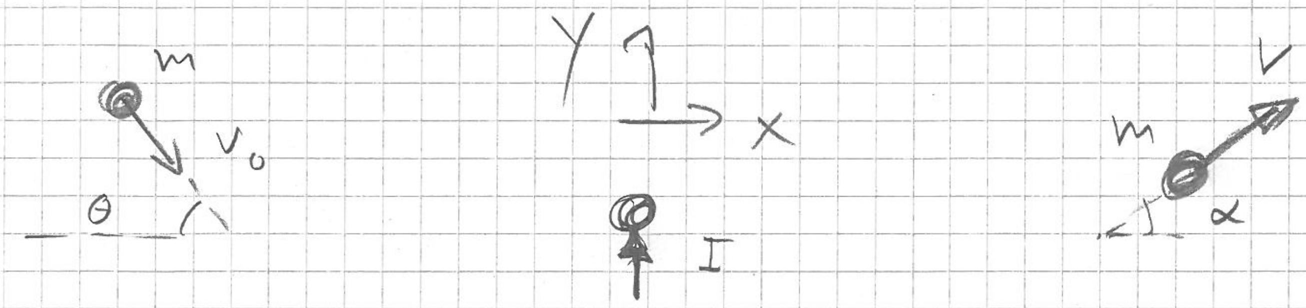
$$N(\theta) = mg(12 - 3\cos\theta) \qquad //$$

Ekv. (2)

$$a_t = g\sin\theta \qquad //$$

5) <u>stöten</u>

Före Under Efter



$\bar{I}^s = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$ ger

$\rightarrow \quad 0 = mV\cos\alpha - mV_0\cos\theta \qquad (1)$

$\uparrow \quad I = mV\sin\alpha - (-mV_0\sin\theta) \qquad (2)$

stöttalet: $e = \dfrac{V\sin\alpha - 0}{0 - (-V_0\sin\theta)} = \dfrac{V\sin\alpha}{V_0\sin\theta} = \dfrac{1}{2}$

(3)

(1), (3) ger efter stöten

$V\cos\alpha = V_0\cos\theta$

$V\sin\alpha = \frac{1}{2}V_0\sin\theta$

Efter stöten en kastbana, $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = -g$,

$x = V\cos\alpha \cdot t$, $y = V\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

max höjd då $\dot{y} = 0$ ger $t = \dfrac{V\sin\alpha}{g}$

och $h = y\left(\dfrac{V\sin\alpha}{g}\right) = V\sin\alpha \cdot \dfrac{V\sin\alpha}{g} - \dfrac{1}{2}g\dfrac{V^2\sin^2\alpha}{g^2}$

ger $h = \dfrac{1}{2g}V^2\sin^2\alpha$

med $v \sin\alpha = \frac{1}{2} v_0 \sin\theta$ och $\theta = 60°$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{8g} = \frac{3 v_0^2}{32 g} \quad //$$

(2) ger sedan

$$I = m(v \sin\alpha + v_0 \sin\theta) \quad \text{och}$$

$$I = \frac{3}{2} m v_0 \sin\theta$$

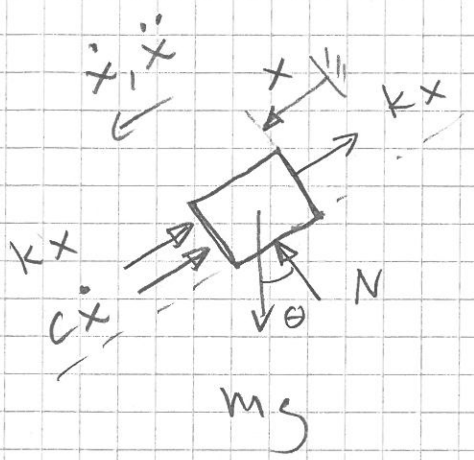
$$I = \frac{3\sqrt{3}}{4} m v_0 \quad //$$

Således:

$$h = \frac{3}{32} \cdot \frac{v_0^2}{g}$$

$$I = \frac{3\sqrt{3}}{4} m v_0$$

6) Frilägg (x = 0 då fjädrarna är ospända)



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ x: ↙ $-2kx - c\dot{x} + mg\sin\theta = m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = g\sin\theta$$

Ident. med $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 X_1$

ger $\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n$, $\frac{2k}{m} = \omega_n^2$, $g\sin\theta = \omega_n^2 X_1$

med $c = \sqrt{8km}$ fås

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad \zeta = 1, \quad X_1 = \frac{mg\sin\theta}{2k}$$

Dvs $x(t) = (A + B\cdot t)e^{-\omega_n t} + \frac{mg}{2k}\sin\theta$

B.V. då $t = 0$ $x(0) = 0$

$\dot{x}(0) = -V_0$

ger $A\cdot 1 + \frac{mg}{2k}\sin\theta = 0$

$B\cdot 1 - A\omega_n = -V_0$

dvs $A = -\frac{mg}{2k} \sin\theta$

$$B = -\frac{mg}{2k} \sin\theta \cdot w_n - V_0$$

Fjäderns längd $L(t) = x(t) + L_0$

Således:

$$L(t) = -\left[\frac{mg}{2k}\sin\theta + \left(\frac{mg}{2k} w_n \sin\theta + V_0\right)t\right] e^{-w_n t}$$

$$+ \frac{mg}{2k} \sin\theta + L_0 \quad //$$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$