Tentamen i Mekanik I del 1
Statik och partikeldynamik

TMME27

2016-10-24, kl 14.00-19.00

Tentamenskod: TEN1

Tentasal: TER1, TER2, TERE, TERF

Examinator: Peter Schmidt

Tentajour: Peter Schmidt, Tel. 28 27 43,
(Besöker salarna ca 15.00)

Kursadministratör: Anna Wahlund, Tel. 28 11 57,
email anna.wahlund@liu.se

Antal uppgifter: 6

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel; (Formelblad bifogas).

Svar anslås på Mekaniks anslagstavla efter skrivningstillfället (Ing. A17 C-korr.). Tentan lämnas efter rättning till Studerandeexpeditionen i A-huset, ing 19C.

Betygsgränser: 5 = 12-15 p
4 = 9-11 p
3 = 6-8 p
1 = 0-5 p (UK)

Totalt antal sidor inkl. försättsbladet: 6

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27,   2016-10-24

Teoridel:

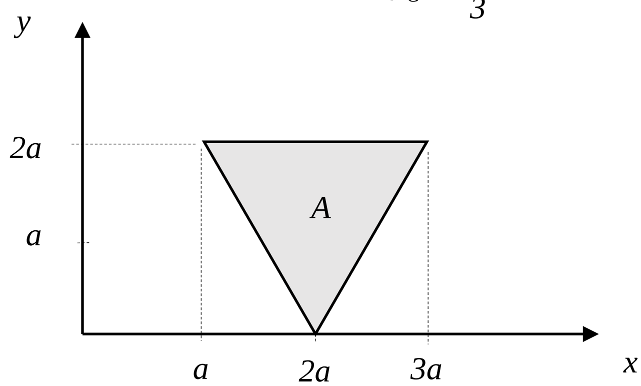
1)
Masscentrum för en kropp definieras som bekant enligt nedan:

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{\int_V \boldsymbol{r}\rho\, dV}{\int_V \rho\, dV}$$

Betrakta en tunn homogen plåt med tjockleken *t* och där arean *A* utgörs av en triangel med geometri enligt figuren. Utgå från definitionen och visa att masscentrums läge i *y*-led ges av:

$$y_G = \frac{4a}{3}$$

(1p)



2a)
Utgå från Newtons kraftlag $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ och definitionen av rörelsemängd $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$ och härled impulslagen för en partikel, dvs

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F}\, dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1$$ (1p)

2b)
Utgå från definitionen av en krafts arbete som uträttas vid en förflyttning från läget $\boldsymbol{r}_1$ till läget $\boldsymbol{r}_2$ längs en godtycklig kurva *C*

$$U = \int_{\boldsymbol{r}_1, C}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

och visa att tyngdkraftens uträttade arbete är oberoende av vägen mellan $\boldsymbol{r}_1$ och $\boldsymbol{r}_2$ och kan skrivas

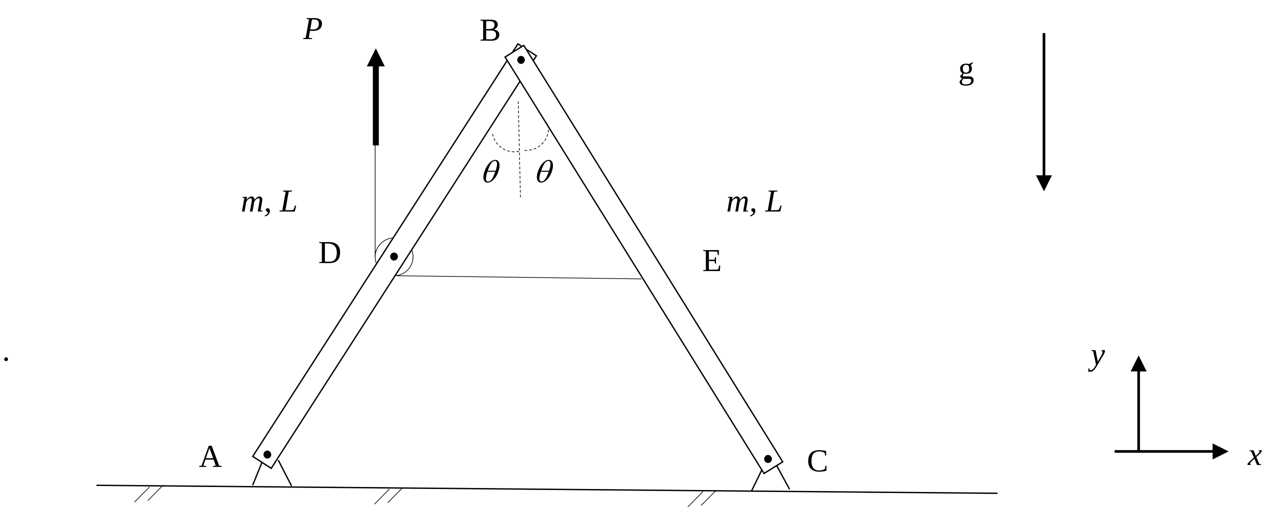
$$U = -mgh$$

där *h* är förflyttningen i höjdled (vertikal förflyttning uppåt). (1p)

Tentamen i Mekanik I del 1, TMME27, 2016-10-24

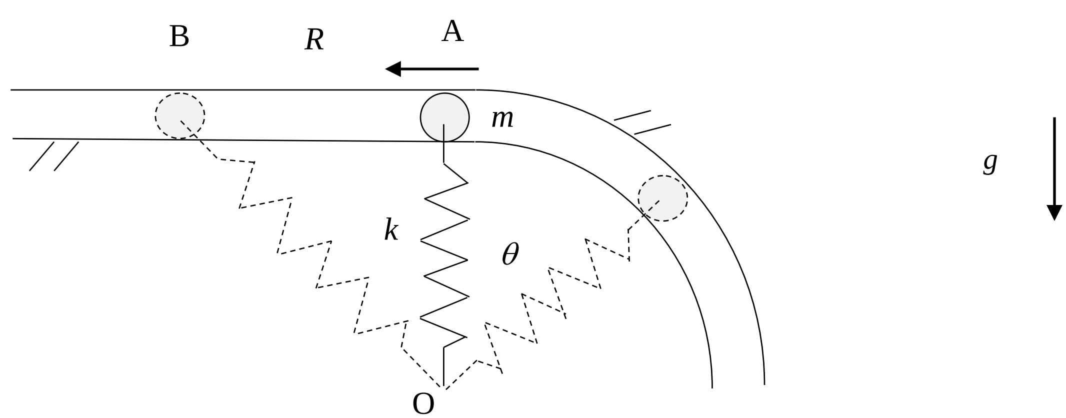
Problemdel:

3)
Två stänger AB och BC med massan m och längden L vardera är sammankopplade enligt figur. Systemet belastas genom att man drar i snöret med en vertikal kraft P. Snöret löper runt en trissa vid D och sedan horisontellt till E där det är fäst i stången BC. Trissan är lagrad i mitt-punkten på AB och trissans massa och radie kan försummas. Beräkna reaktionskraften vid A samt kraften från BC på AB vid B. Svara med x- och y-komponenterna. Försumma friktionen och låt kraften $P=2mg$ samt $\theta = 30^o$. (3p)



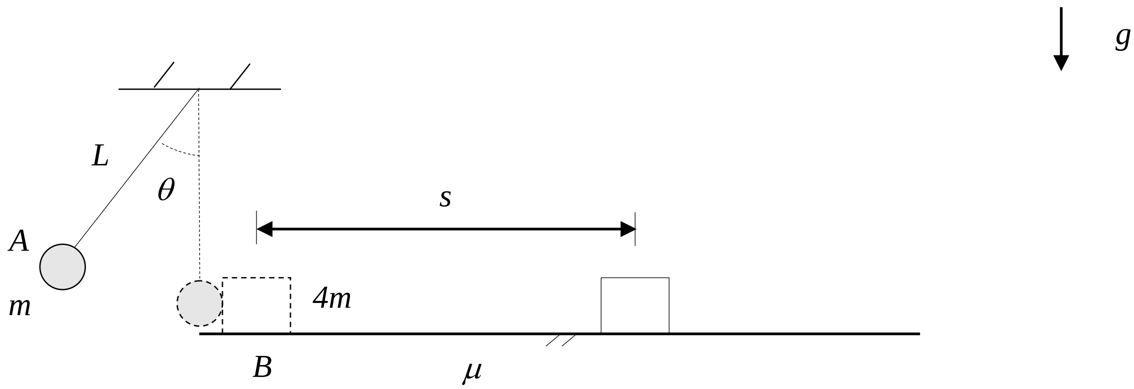
4)
En partikel med massan m är fäst i en fjäder enligt figuren och ges vid läge A en hastighet åt vänster längs ett horisontellt spår då fjädern är vertikal. Partikeln vänder sedan vid B då den rört sig sträckan R och passerar därefter punkten A och följer sedan en cirkelbana med radien R där O är cirkelns mittpunkt. Fjäderkonstanten är $k = 12\,mg \,/\, R$ och fjäderns ospända längd är $L_0 = R\,/\,2$. Beräkna normalkraften från banan på partikeln som funktion av vinkeln θ för den cirkulära delen av banan. Studera intervallet $0 \le \theta \le \pi / 2$. Försumma friktionen.

(3p)



5)
En partikelpendel med en pendelkula med massan *m* och snörlängden *L* släpps från vila vid *A* från en vinkel θ enligt figur. När pendeln når lägsta punkten stöter den samman med en annan stillastående partikel *B* med massan *4m*. Stöttalet vid stöten är e = ½ och låt vinkeln $\theta = 60^o$. Beräkna partiklarnas hastigheter omedelbart efter stöten samt sträckan *s* som *B* rör sig innan den stannar om friktionskoefficienten mellan partikel *B* och marken är μ.

(3p)



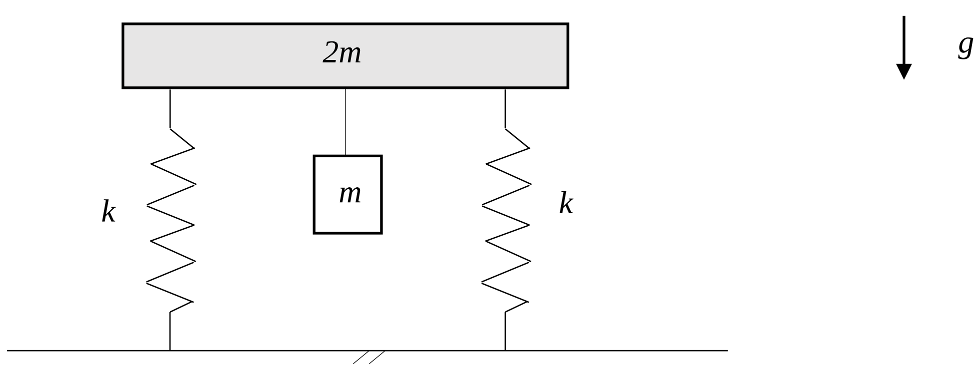
6)
En platta med massan *2m* är placerad på två fjädrar med fjäderkonstanten *k* vardera. En vikt med massan *m* är via ett snöre fäst i plattan enligt figur. Systemet släpps från vila vid tiden $t = 0$ då fjädrarna har ospända längden L_0.

a) Beräkna kraften i snöret som funktion av tiden *t* för den efterföljande rörelsen.

(2p)

b) Efter hur lång tid efter starten når systemet sitt vändläge första gången?

(1p)



Formelblad som bifogas tentamen i Partikeldynamik:

Kinematik:

Hastighet och acceleration

- **Naturliga komponenter** $n - t$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

Krökningen κ och krökningsradien ρ för en kurva $x = x(u)$, $y = y(u)$ ges av:

$$\kappa = \frac{|\frac{d^2y}{du^2}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2}|}{\left\{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2\right\}^{3/2}}, \qquad \rho = 1/\kappa$$

- **Polära koordinater** $r - \theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

Kinetik:

- **Kraftlagen**

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

- **Mekaniska energisatsen**

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

där

$$U = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = mgh, \qquad V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- **Impuls och impulsmomentekvationen**

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{G}_2 - \boldsymbol{G}_1, \qquad \boldsymbol{G} = m\boldsymbol{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_o dt = \boldsymbol{H}_{o2} - \boldsymbol{H}_{o1}, \qquad \boldsymbol{H}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M}_o = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}$$

- **Stöttal**

$$e = \frac{(v_2^{'})_n - (v_1^{'})_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

- **Svängningar**

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1 + \frac{F_{01}}{m} sin\omega t + \frac{F_{02}}{m} cos\omega t$$

Lösningen till differentialekvationen ovan kan skrivas $x = x_h + x_p$. Homogena lösningen x_h ges av:

$\zeta > 1, \qquad x_h = Ae^{\omega_n t(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} + Be^{\omega_n t(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$

$\zeta = 1, \qquad x_h = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$

$\zeta < 1, \qquad x_h = e^{-\zeta\omega_n t}(Acos\omega_d t + Bsin\omega_d t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_d t + \Psi)$

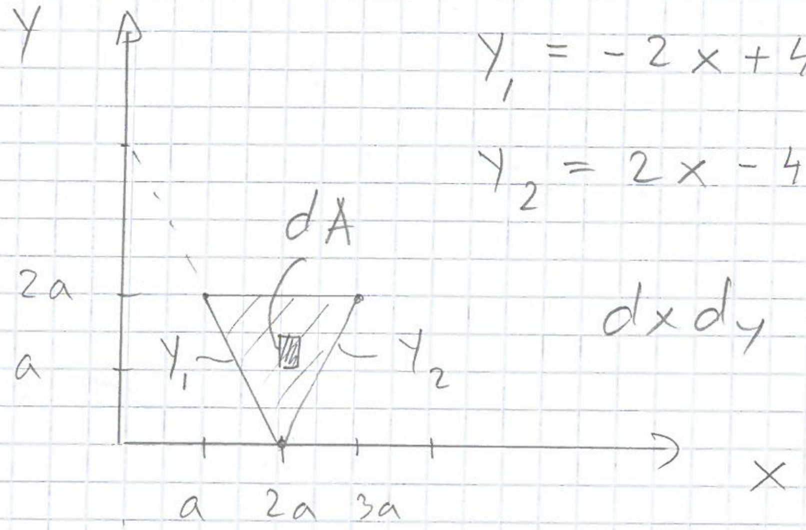
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Partikulärlösningen x_p vid en harmonisk störningskraft beräknas med ansatsen:[1]

$$x_p = C_1 + C_2 cos\omega t + C_3 sin\omega t$$

[1] om $\zeta = 0$ förutsättes att $\omega \neq \omega_n$

1a)



$Y_1 = -2x + 4a$

$Y_2 = 2x - 4a$

dxdy -element

$$Y_G = \frac{\int_V y \rho \, dV}{\int_V \rho \, dV} \; ; \quad \begin{cases} dV = t \cdot dA = t \, dx dy \\ x_1 = -\frac{1}{2} y + 2a \\ x_2 = \frac{1}{2} y + 2a \end{cases}$$

$$\int_V y \rho \, dV = \int_A y \rho \cdot t \, dx dy = \rho \cdot t \int_A y \, dx dy =$$

$$= \rho t \int_0^{2a} \left[\int_{-\frac{1}{2}y+2a}^{\frac{1}{2}y+2a} dx \right] y \, dy = \rho t \int_0^{2a} \left[x \right]_{-\frac{1}{2}y+2a}^{\frac{1}{2}y+2a} y \, dy$$

$$= \rho t \int_0^{2a} y^2 dy = \rho \cdot t \, \frac{8}{3} a^3 \; //$$

$$\int_V \rho \, dV = \int_A \rho \, t \, dx dy = \rho t \int_A dx dy =$$

$$= \rho t \int_0^{2a} \left[\int_{-\frac{1}{2}y+2a}^{\frac{1}{2}y+2a} dx \right] dy = \rho t \int_0^{2a} y \, dy = \rho t \, 2a^2 \; //$$

ger $Y_G = 4a/3$ V.S.V, //

2a) $\sum \bar{F} = m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$

dvs $\sum \bar{F} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$ mult. med dt och integrera

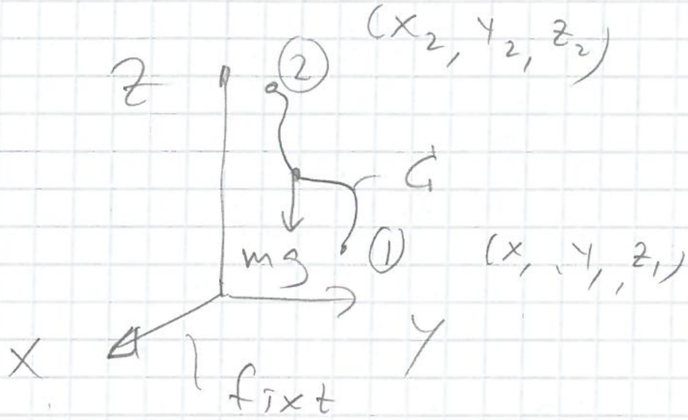
$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \bar{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m\bar{v})\,dt = \left[m\bar{v} \right]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= m\bar{v}(t_2) - m\bar{v}(t_1) = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 =$$

$$= \bar{G}_2 - \bar{G}_1$$ således:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \bar{F}\,dt = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$$ v.s.v.

2b) $\quad U = \int_{\bar{r}_1, G}^{\bar{r}_2} \bar{F} \circ d\bar{r}$



Låt $\bar{F} = -mg\bar{e}_z$

$\bar{r} = x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z$ (läget)

$d\bar{r} = dx\,\bar{e}_x + dy\,\bar{e}_y + dz\,\bar{e}_z$

$$U = \int_{1}^{2} \bar{F} \circ d\bar{r} = \int_{1}^{2} -mg\bar{e}_z \circ (dx\,\bar{e}_x + dy\,\bar{e}_y + dz\,\bar{e}_z)$$

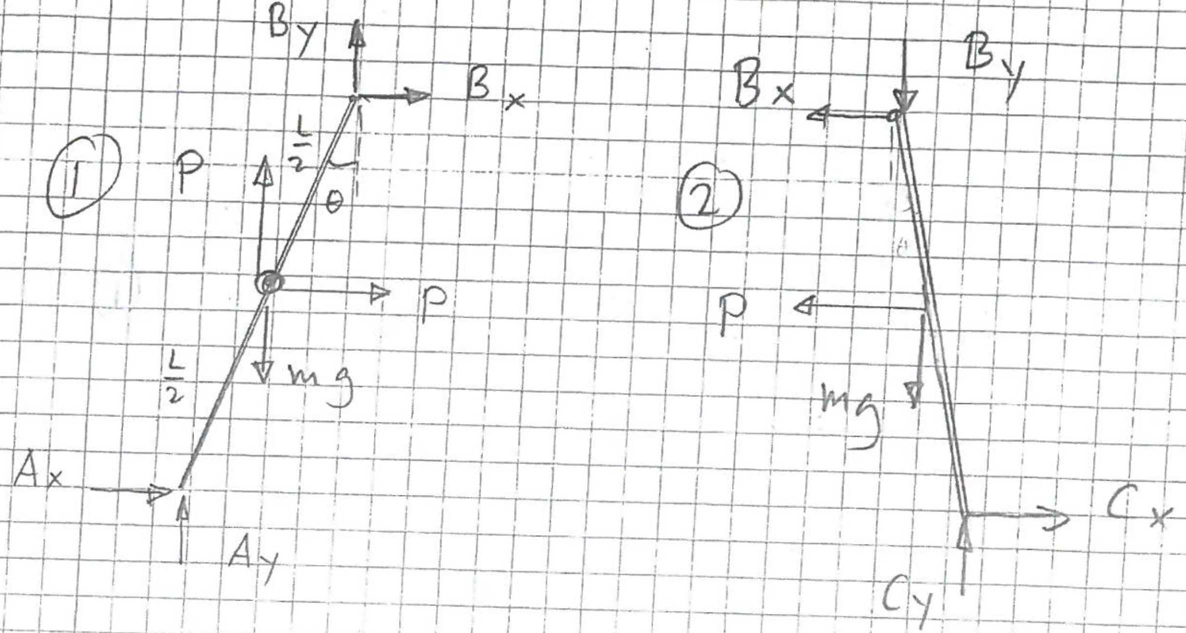
$$= \int_{z_1}^{z_2} -mg\,dz = -mg\left[z\right]_{z_1}^{z_2} =$$

$= -mg(z_2 - z_1)$ oberoend av vägen G.

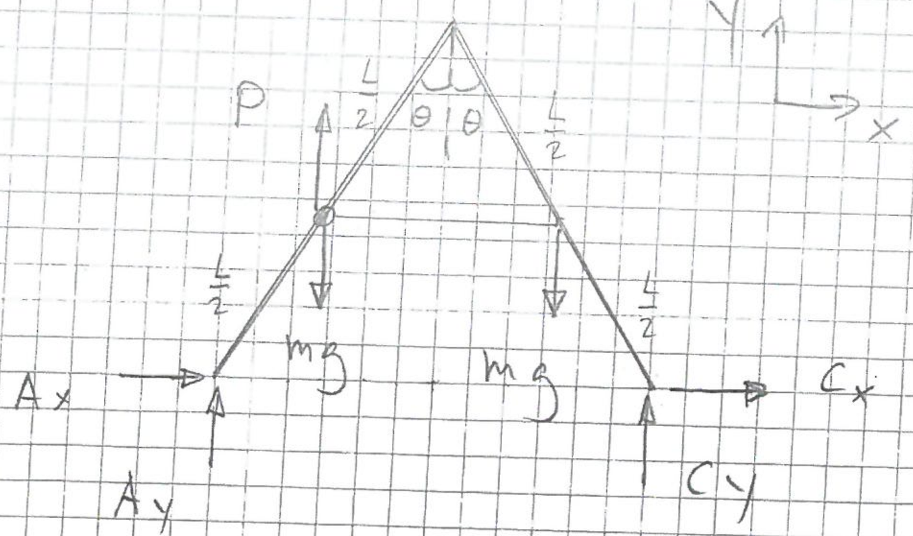
$$U = -mg\underbrace{(z_2 - z_1)}_{h} = -mgh$$

dvs $U = -mgh$ v.s.v. //

3) Frilägg delarna



Frilägg systemet



$\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$ ger

Systemet:

$\rightarrow$ $A_x + C_x = 0$ (1)

$\uparrow$ $A_y - mg - mg + P + C_y = 0$ (2)

$\circlearrowleft C$ $mg \frac{L}{2} \sin\theta + mg \left(L \sin\theta + \frac{L}{2} \sin\theta \right)$

$- P \left(L \sin\theta + \frac{L}{2} \sin\theta \right) - A_y \, 2L \sin\theta = 0$

(3)

Del ①:

$\rightarrow$ $B_x + P + A_x = 0$ (4)

$\uparrow$ $A_y - mg + P + B_y = 0$ (5)

$\circlearrowleft B$ $P \cdot \frac{L}{2} \cos\theta + mg \frac{L}{2} \sin\theta - P \cdot \frac{L}{2} \sin\theta$

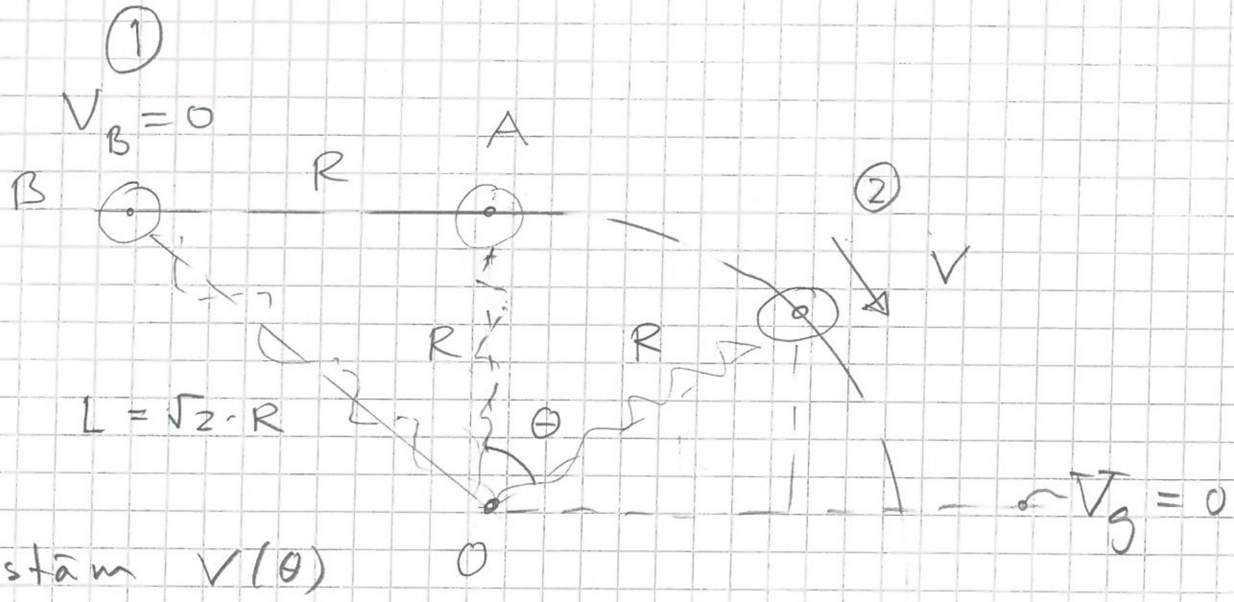
$+ A_x L \cos\theta - A_y L \sin\theta = 0$ (6)

med $P = 2mg$ och $\theta = 30^\circ$ $\left(\sin\theta = \frac{1}{2}, \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ ger

(3), (4), (5), (6) $\begin{cases} A_x = -mg \\ A_y = -\frac{1}{2} mg \end{cases}$ //

$\begin{cases} B_x = -mg \\ B_y = -\frac{1}{2} mg \end{cases}$ //

4)



Bestäm $v(\theta)$

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

$$U = 0 \quad (\bar{N} \circ d\bar{r} = 0) \qquad V_B = 0$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m V_B^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Delta V_g = V_{g_2} - V_{g_1} = mgR\cos\theta - mgR$$

$$= -mgR(1-\cos\theta)$$

$$\Delta V_e = V_{e_2} - V_{e_1} = \frac{1}{2} k (R - L_0)^2 - \frac{1}{2} k (\sqrt{2} \cdot R - L_0)^2$$

$L_0 = \frac{R}{2}$, $k = \frac{12mg}{R}$ ger

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{12mg}{R} \left(R - \frac{1}{2}R\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{12mg}{R} \left(\sqrt{2} \cdot R - \frac{1}{2}R\right)^2$$

$$\Delta V_e = -6mgR(2-\sqrt{2})$$

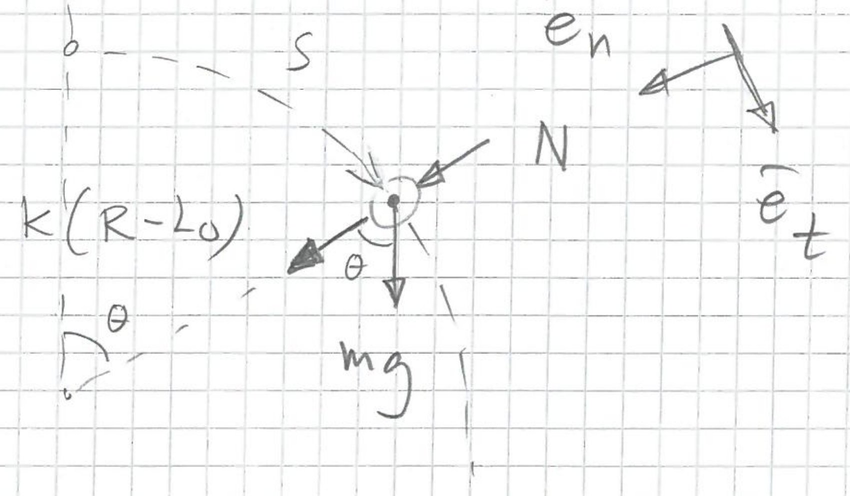
$$0 = \frac{1}{2} m v^2 - mgR(1-\cos\theta) - 6mgR(2-\sqrt{2})$$

ger $v^2(\theta) = 2gR(13 - 6\sqrt{2} - \cos\theta)$ //

Frilägg m

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}$$

$$a_t = \ddot{s}$$



$$\Sigma \bar{F} = m\bar{a} \quad \text{ger}$$

$\bar{e}_n \swarrow$ $\quad k(R-L_0) + N + mg\cos\theta = m\dfrac{v^2}{R}$

med $L_0 = \frac{1}{2}R$, $k = 12mg/R$ och v ur (1)

fås

$$N(\theta) = mg\left(20 - 12\sqrt{2} - 3\cos\theta\right) \quad //$$

A → Före stöten

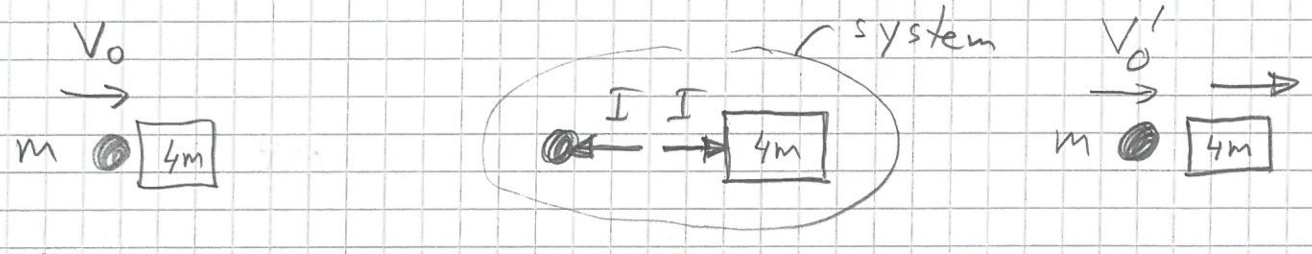
5) $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

$$0 = \frac{1}{2} m V_0^2 - mgL(1-\cos\theta)$$

$$V_0 = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)} = \sqrt{gL} \quad //$$

Stöten

Före Under Efter



$$\overline{I}^{s}_{syst.} = \overline{G}_{2,syst.} - \overline{G}_{1,syst.} \quad \text{ger}$$

$$\rightarrow \quad 0 = mV_0' + 4mV_B' - (m \cdot V_0 - 4m \cdot 0)$$

ger $\quad V_0 = V_0' + 4V_B' \quad (1)$

stöttalet $\quad e = \dfrac{V_B' - V_0'}{V_0 - 0} = \dfrac{1}{2} \quad$ ger

$$\frac{1}{2} V_0 = V_B' - V_0' \quad (2)$$

(1), (2) ger

$$\begin{cases} V_0' = -\frac{1}{5} V_0 \\ V_B' = \frac{3}{10} V_0 \end{cases} \quad //$$

Efter stöten till stopp för B.

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

$$U = -\mu 4 mg \cdot s$$

$$\Delta T = 0 - \frac{1}{2} 4m V_B'^2$$

$$-\mu 4mg \cdot s = -\frac{1}{2} 4m V_B'^2$$

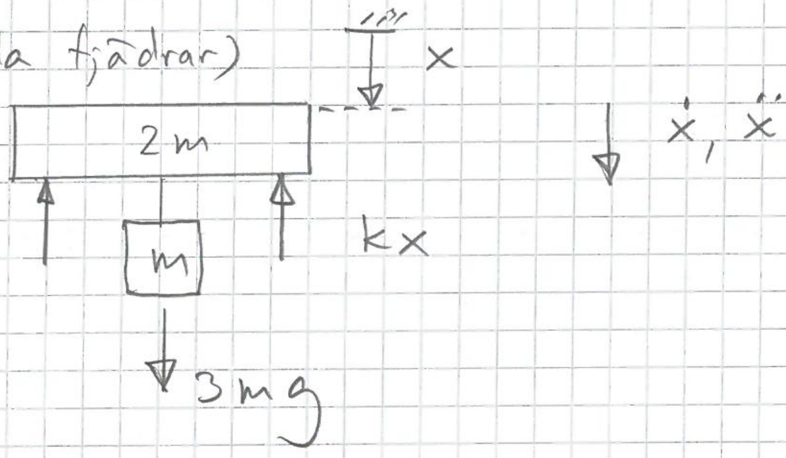
$$s = \frac{1}{2\mu g} V_B'^2 = \frac{1}{2\mu g} \cdot \frac{9}{100} V_0^2$$

$$s = \frac{9}{200} \cdot \frac{L}{\mu} \quad //$$

6) Bestäm $x(t)$ först.

Frilägg systemet $3m$

($x=0$ ospända fjädrar)



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger

$\downarrow \quad 3mg - 2kx = 3m\ddot{x}$

$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = g$ Ident. med

$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_1$

$2\zeta\omega_n = 0, \quad \omega_n^2 = \frac{2k}{3m}, \quad \omega_n^2 x_1 = g$

ger $\zeta = 0, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}, \quad x_1 = \frac{3mg}{2k}$

dvs $x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{3mg}{2k}$

där $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$ //

B.V. då $t = 0$

$$x(0) = 0 \iff A + \frac{3mg}{2k} = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0 \iff B \cdot \omega_n = 0$$

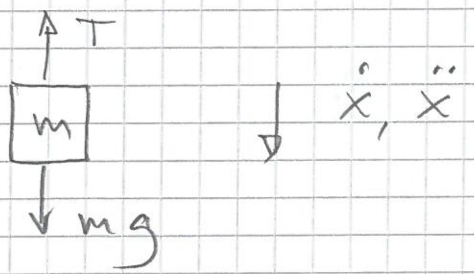
ger $A = -\dfrac{3mg}{2k}$, $B = 0$

Således:

$$x(t) = -\frac{3mg}{2k}\cos\omega_n t + \frac{3mg}{2k} \quad //$$

där $\omega_n = \sqrt{\dfrac{2k}{3m}}$ (1)

Frilägg massan m



$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ ger $\downarrow$ $mg - T = m\ddot{x}$ (2)

där $\ddot{x}$ fås genom derivering av (1)

$$\ddot{x} = \frac{3mg}{2k}\omega_n^2 \cos\omega_n t = g\cos\omega_n t$$

ins. i (2) ger $T = mg - mg\cos\omega_n t$

a) $T(t) = mg(1 - \cos\omega_n t)$, $\omega_n = \sqrt{\dfrac{2k}{3m}}$ //

b) vändläget fås då $\dot{x} = 0$

(1) ger $\dot{x} = \frac{3mg}{2k} \omega_n \sin \omega_n t$

$\dot{x} = 0$ då $\sin \omega_n t = 0$, dvs

$\omega_n t = \pi$ (första vändläget)

$$t = \frac{1}{\omega_n} \cdot \pi = \sqrt{\frac{3m}{2k}} \cdot \pi$$

Dvs $t = \pi \sqrt{\frac{3m}{2k}}$ //